§ 18. Ударная адиабата. Возрастание энтропии в скачке уплотнения

Рассмотрим теперь скачок уплотнения еще с точки зрения термодинамики. Выясним с помощью основных уравнений скачка уплотнения соотношение между плотностью и давлением по обе стороны скачка. Хотя тепловой процесс в скачке уплотнения является адиабатическим, но соотношение между плотностью и давлением отличается здесь от известного из термодинамики уравнения адиабаты. Причина этого состоит в том, что сжатие газа в ударной волне происходит скачкообразно, мгновенно и сопровождается нарастанием энтропии, а не медленно и постепенно, как это предполагается при выводе уравнения адиабаты с постоянной энтропией.

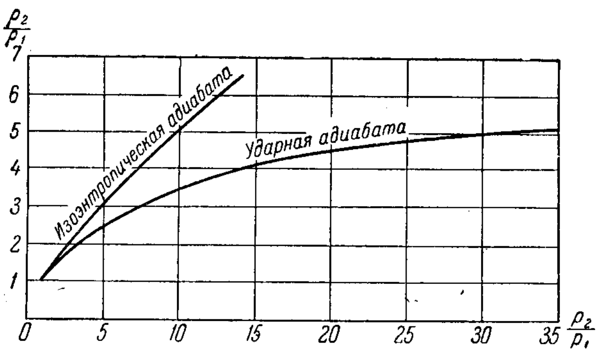

Рис. 5.37. Зависимость плотности от давления при адиабатическом процессе. Максимальное увеличение плотности в случае ударного сжатия воздуха равно 6.

Для того чтобы найти зависимость между плотностью и давлением по обе стороны скачка, исключим M_{1n}^2 из формул (5.42) и (5.43). Из формулы (5.43) находим:

$$M_{1n}^2 = \frac{(k+1)\frac{p_2}{p_1} + (k-1)}{2k},$$

подставляя это выражение в формулу (5.42), после простых алгебраических преобразований получим:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(k+1)\frac{p_2}{p_1} + (k-1)}{(k-1)\frac{p_2}{p_1} + (k+1)}. \tag{5.52}$$

Эта зависимость между плотностью и давлением по обе стороны скачка называется *ударной адиабатой*. Она изображена графически на рис. 5.37, где для сравнения показана зависимость плотности от давления и в случае плавного адиабатического процесса (точнее говоря, изоэнтропического процесса, т. е. протекающего при постоянной энтропии):

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/k}.$$

Значения ρ_2/ρ_1 совпадают по обеим зависимостям при $p_2/p_1=1$, и кривые имеют в этой точке общую касательную, но с возрастанием p_2/p_1 отношение плотностей при изоэнтропическом процессе увеличивается до бесконечности, тогда как по ударной адиабате — до конечного предела, равного, как видно из равенства (5.52):

$$\lim_{\frac{p_2}{p_1}\to\infty}\frac{\rho_2}{\rho_1}=\lim_{\frac{p_1}{p_2}\to 0}\frac{(k+1)+(k-1)\frac{p_1}{p_2}}{(k-1)+(k+1)\frac{p_1}{p_2}}=\frac{k+1}{k-1}.$$

Для воздуха ($k=1{,}4$) этот предел равен 6. Таким образом, никакой разностью давлений в скачке уплотнения воздух не может быть сжат так, чтобы его плотность увеличилась в шесть или более раз, тогда как при изоэнтропическом процессе можно увеличением давления как угодно увеличить плотность. Вообще, при изоэнтропическом процессе каждому значению $p_2/p_1>1$ соответствует большее значение ρ_2/ρ_1, нежели по ударной адиабате. Иными словами, при ударном сжатии газ становится как бы более жестким, чем при изоэнтропическом процессе: он в меньшей степени поддается сжатию.

Из уравнения состояния газа

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{p_2}{p_1}\cdot\frac{\rho_1}{\rho_2}$$

следует, что так как при одинаковых значениях p_2/p_1 величина ρ_2/ρ_1 в скачке уплотнения меньше, нежели при изоэнтропическом процессе, то отношение температур T_2/T_1 будет в скачке уплотнения большим, чем при изоэнтропическом процессе. Таким образом, при ударном сжатии газ нагревается больше, чем при изоэнтропическом сжатии с таким же отношением начального и конечного давлений.

Потери механической энергии в скачке уплотнения могут быть охарактеризованы также возрастанием энтропии в потоке, пересекающем поверхность скачка. Из термодинамики известно [1]), что приращение энтропии представляет собою изменение количества тепла, отнесенное к единице абсолютной температуры. Если обозначить энтропию через S, количество тепла, приходящееся на единицу массы газа — через Q, а абсолютную температуру — через T, то сможем написать:

$$dS=\frac{dQ}{T}.$$

[1]) См., например, Вукалович М. П. и Новиков И. И., Техническая термодинамика, изд. 2, Госэнергоиздат, 1955.

Согласно первому закону термодинамики приращение количества тепла расходуется на изменение внутренней энергии газа и на работу расширения:

$$dQ = dU + pdV;$$

здесь dU есть изменение внутренней энергии килограмма массы газа, V — объем одного килограмма массы, равный $1/\rho$. Если тепловой процесс происходит при постоянном объеме, то $dQ = dU$, т. е. все количество тепла расходуется на изменение внутренней энергии. Это количество тепла можно подсчитать как произведение количества тепла, затрачиваемого на изменение температуры килограмма массы на один градус (т. е. теплоемкости при постоянном объеме c_v), на изменение температуры dT; таким образом,

$$dU = c_v dT.$$

Подставляя в формулу для dS выражения dQ, dU и V, получим:

$$dS = c_v \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} d\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Температуру T можно исключить отсюда с помощью уравнения состояния идеального газа

$$\frac{p}{\rho} = RT;$$

кроме того, заменим газовую постоянную R по известному из термодинамики соотношению

$$R = (c_p - c_v);$$

тогда будем иметь:

$$dS = c_v \left[\frac{d\left(\frac{p}{\rho}\right)}{\frac{p}{\rho}} + (k-1) \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\frac{1}{\rho}} \right].$$

Интегрируя последнее равенство от сечения 1 на струйке газа до следующего по потоку сечения 2, получим:

$$S_2 - S_1 = c_v \left(\ln \frac{p}{\rho} + \ln \frac{1}{\rho^{k-1}} \right) \Bigg|^2,$$

или, иначе,

$$S_2 - S_1 = c_v \left(\ln \frac{p_2}{\rho_2^k} - \ln \frac{p_1}{\rho_1^k} \right). \qquad (5.53)$$

Из этой формулы видно, что если бы поток по обе стороны скачка уплотнения удовлетворял уравнению адиабатического процесса $p/\rho^k = \text{const}$, то изменения энтропии не было бы; процесс был бы не только адиабатическим, но и изоэнтропическим. Однако в действительности, давление и плотность по обе стороны скачка уплотнения связаны не уравнением $p/\rho^k = \text{const}$, а уравнением ударной адиабаты, и поэтому поток в скачке уплотнения, хотя и является адиабатическим (в том смысле, что нет подвода к газу внешнего тепла и отвода тепла от газа), но он не изоэнтропичен. Так как $p_2/\rho_2^k > p_1/\rho_1^k$, то $S_2 > S_1$, т. е. в скачке уплотнения происходит нарастание энтропии.

Из термодинамики известно, что в изолированной системе энтропия может только нарастать (второй закон термодинамики). Отсюда следует, что всегда в потоке газа $p_2/\rho_2^k > p_1/\rho_1^k$ или, иными словами, что скачки разрежения невозможны; этот, уже известный из предыдущего вывод получается здесь на основании термодинамических соображений.

Приращение энтропии в скачке уплотнения можно выразить через единственный параметр M_{1n}; с этой целью подставим в формулу (5.53) значение p_2/p_1 и ρ_1/ρ_2 соответственно из (5.43) и (5.42); тогда получим:

$$S_2 - S_1 = c_v \ln \left\{ \frac{1}{(k+1)^{k+1}} \left[2k\mathrm{M}_{1n}^2 - (k-1)\right] \left[\frac{2}{\mathrm{M}_{1n}^2} + (k-1) \right]^k \right\}.$$

Отсюда видно, что *с возрастанием* M_{1n} *приращение энтропии увеличивается,* а следовательно, увеличиваются и потери механической энергии.

Так как $\mathrm{M}_{1n} = \mathrm{M}_1 \sin\beta$, то возрастание M_{1n} может произойти при увеличении M_1 или при увеличении угла между v_1 и поверхностью скачка. *Наибольшие потери механической энергии* в этом последнем случае *будут тогда, когда* v_1 *перпендикулярно к поверхности скачка.*

Для того чтобы количественно охарактеризовать потери механической энергии в скачке уплотнения, введем безразмерный коэффициент σ, равный отношению давления торможения за скачком к давлению торможения перед скачком:

$$\sigma = \frac{p_{20}}{p_{10}};$$

величина σ называется *коэффициентом восстановления давления в скачке.*

Приращение энтропии в скачке уплотнения можно выразить через коэффициент восстановления давления σ. С этой целью представим формулу (5.53) в виде

$$S_2 - S_1 = c_v \ln\left(\frac{p_2}{\rho_2^k}\,\frac{\rho_1^k}{p_1}\right).$$

Так как для части потока перед скачком и для части потока за скачком имеет место адиабатический процесс с сохранением энтропии, то мы можем написать:

$$\frac{\rho_1^k}{p_1} = \frac{\rho_{10}^k}{p_{10}}, \qquad \frac{p_2}{\rho_2^k} = \frac{p_{20}}{\rho_{20}^k}.$$

Кроме того, по известному свойству скачка уплотнения (формула (5.34)) имеем:

$$\frac{p_{20}}{\rho_{20}} = \frac{p_{10}}{\rho_{10}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\rho_{10}^k}{\rho_{20}^k} = \frac{p_{10}^k}{p_{20}^k},$$

и возвращаясь к приращению энтропии, получим:

$$S_2 - S_1 = c_v \ln\left(\frac{p_{20}}{p_{10}} \frac{\rho_{10}^k}{\rho_{20}^k}\right) = c_v \ln\left[\left(\frac{p_{20}}{p_{10}}\right)^{1-k}\right].$$

Заменяя здесь отношение p_{20}/p_{10} через σ, находим:

$$S_2 - S_1 = c_v (1 - k) \ln \sigma. \tag{5.54}$$

Таким образом, приращение энтропии в скачке уплотнения оказывается пропорциональным логарифму коэффициента восстановления давления и, следовательно, зависит так же, как и σ от M_{1n}.

При движении тела в газе (при $\mathrm{M}_\infty > \mathrm{M}_{\text{кр}}$) потери механической энергии в скачках уплотнения влекут за собой прирост лобового сопротивления тела. *Лобовое сопротивление, возникающее от потерь давления в скачках уплотнения, называется волновым сопротивлением.* Оно представляет собою сопротивление от давлений, распределенных по поверхности тела, и может быть вычислено, если распределение давлений известно. Для того чтобы понять происхождение волнового сопротивления, рассмотрим простейший случай, когда газ обтекает тело, имеющее плоскость симметрии, и поток направлен вдоль этой плоскости. При $1 > \mathrm{M}_\infty > \mathrm{M}_{\text{кр}}$ у поверхности тела образуются скачки уплотнения, замыкающие сверхзвуковую область. Они изменяют распределение давления по поверхности тела по сравнению с безударным обтеканием (т. е. с обтеканием в отсутствие скачков). На рис. 5.38 дано примерное распределение давления по поверхности симметрично обтекаемого тела для случая, если бы обтекание было безударным (кривая *а*), и для случая, когда у поверхности тела располагается скачок уплотнения (кривая *б*). Хотя давление в скачке уплотнения резко возрастает, но из-за потерь давления в скачке оно не достигает той величины, которую имело бы в случае безударного обтекания. Поэтому за скачком давление оказывается в действитель-

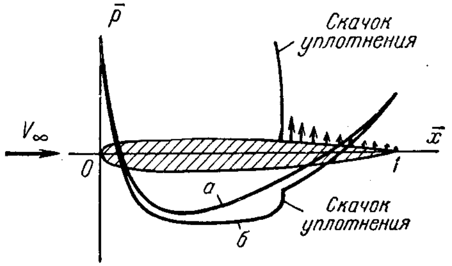

Рис. 5.38. Распределение давлений вдоль симметрично обтекаемого тела:

а — в случае безударного обтекания; *б* — в случае обтекания со скачком уплотнения. На верхней части чертежа показана в виде векторной диаграммы разность между давлениями по кривым *а* и *б*.

ности меньшим, чем оно было бы в отсутствие скачка. Этот недостаток давления за скачком Δp изображен в виде векторной диаграммы на рис. 5.38. Так как Δp — величина по знаку отрицательная, то векторы $\Delta \boldsymbol{p}$ направлены по наружной нормали к контуру сечения тела, и так как они приложены к хвостовой части тела, то результирующая сила от давлений Δp будет направлена вдоль скорости набегающего потока, т. е. будет представлять собой лобовое сопротивление. Это и есть в данном случае волновое сопротивление тела.

Волновое сопротивление непосредственно зависит от потерь давления в скачках уплотнения. Для того чтобы показать это, обратимся к формуле для лобового сопротивления, выведенной методом импульсов (гл. III, § 21). Согласно этой формуле имеем:

$$Q = \int\limits_{(\Sigma)} \rho (V_\infty - v_x) v_x \, d\Sigma + \int\limits_{(\Sigma)} (p_\infty - p) \, d\Sigma,$$

где Σ есть плоскость, перпендикулярная к направлению набегающего потока и проведенная за телом. При движении тела в несжимаемой среде, как уже указывалось в гл. III, давление за телом полностью восстанавливается (если только нет вихрей с осями, параллельными потоку); в этом случае на плоскости Σ, достаточно удаленной от тела, $p = p_\infty$ и второе слагаемое в формуле для Q отпадает. При движении тела в идеальной сжимаемой среде, когда $\mathrm{M} > \mathrm{M}_{\text{кр}}$, давление за телом полностью не восстанавливается. Второе слагаемое в формуле для Q может быть преобразовано в этом случае следующим образом:

$$\int\limits_{(\Sigma)} (p_\infty - p) \, d\Sigma = p_\infty \int\limits_{(\Sigma)} \left(1 - \frac{p}{p_\infty}\right) d\Sigma =$$

$$= p_\infty \int\limits_{(\Sigma)} \left[1 - \frac{p_{20} \left(1 + \frac{k-1}{2} \mathrm{M}_\infty^2\right)^{\frac{k}{k-1}}}{p_{10} \left(1 + \frac{k-1}{2} \mathrm{M}_2^2\right)^{\frac{k}{k-1}}} \right] d\Sigma,$$

где p_{20} — давление торможения за телом, p_{10} — давление торможения перед телом, M_2 — число M в плоскости Σ. Отношение $p_{20}/p_{10} = \sigma$ есть коэффициент восстановления давления для системы скачков, сопровождающих тело; поэтому мы можем написать:

$$Q = \int\limits_{(\Sigma)} \rho (V_\infty - v_x) v_x \, d\Sigma + p_\infty \int\limits_{(\Sigma)} \left[1 - \sigma \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} \mathrm{M}_\infty^2}{1 + \frac{k-1}{2} \mathrm{M}_2^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \right] d\Sigma.$$

Из этой формулы видно, что чем меньше σ, т. е. чем больше потери давления в скачках, тем больше при прочих равных условиях лобовое сопротивление тела, движущегося в идеальной газовой среде.