

Если течение за скачком является сверхзвуковым, то можем написать:  $a_2/v_2 = \sin A_2$ , и так как  $a_1/v_1 = \sin A_1$ , где  $A_1$  есть угол между набегающим потоком и образующей конуса возмущений (в данном случае, когда поток является плоским — клина возмущения), то

$$\sin \beta > \sin A_1, \quad \sin(\beta - \vartheta) < \sin A_2.$$

Следовательно,

$$A_1 < \beta < A_2 + \vartheta = A'_2.$$

Таким образом, линия скачка уплотнения (т. е. линия пересечения плоскости скачка с плоскостью течения газа) всегда составляет с набегающим потоком несколько больший угол, нежели линия распространения возмущений, исходящая из той же точки, что и линия скачка. С другой стороны, угол  $\beta - \vartheta$  не может превышать величины угла, образованного с набегающим потоком линией распространения возмущений, соответствующей скорости потока  $v_2$  за скачком.

Зная угол наклона скачка уплотнения и число  $M_1$  перед скачком, можно однозначно определить отношение одноименных величин, характеризующих поток перед скачком и за скачком по формулам (5.41)—(5.47), если в эти формулы подставить вместо  $M_{1,n}$  произведение  $M_1 \sin \beta$ . Мы видим, что  $v_{2n}/v_{1n}$ ,  $\rho_1/\rho_2$ ,  $p_1/p_2$ ,  $T_1/T_2$ ,  $a_1/a_2$  являются функциями только от  $M_1 \sin \beta$ , причем все эти функции с возрастанием  $M_1 \sin \beta$  убывают; графики этих функций, а также графики  $\sigma$  и  $\frac{1}{c_v} (S_2 - S_1)$  приведены на рис. 5.41.

## § 20. Ударная поляра для плоского скачка. Понятие о методе годографа скорости

Скорость потока за скачком уплотнения и угол наклона скачка могут быть получены не только аналитически, как это было сделано выше, но и графическим построением. Наиболее наглядное изображение геометрических и кинематических зависимостей, характеризующих скачок уплотнения, получается в том случае, если воспользоваться так называемым методом годографа скорости. Этот метод состоит в том, что поток изображается не в системе координат  $x, y, z$ , а в системе, где по осям координат отложены составляющие скорости  $v_x$  и  $v_y$ . Каждая точка плоскости в этой системе координат определяет вектор скорости, конец которого находится в этой точке, а начало — в начале координат, как в полюсе. При движении частицы жидкости вектор ее скорости описывает своим концом кривую на плоскости  $v_x v_y$ ; эта кривая, как известно из механики, называется годографом скорости. Поэтому и сама плоскость  $v_x v_y$  называется *плоскостью годографа скорости*. Дозвуковая область течения газа изобразится на плоскости годографа скорости кругом с центром в начале координат и радиусом, равным критической скорости  $v_{кр}$ .

Сверхзвуковая область изобразится на этой плоскости кольцевой полосой, ограниченной двумя концентрическими окружностями, одной с радиусом, равным  $v_{кр}$  и другой — с радиусом, равным  $v_{max}$  (рис. 5.42). Удобство метода годографа скорости заключается в том, что на плоскости годографа индивидуальные особенности потоков, связанных с их протяженностью, исчезают и выявляются их общие свойства.

Направим ось  $v_x$  вдоль вектора скорости потока перед скачком уплотнения  $v_1$ , ось  $v_y$  — перпендикулярно к этому вектору и найдем на плоскости годографа геометрическое место концов вектора скорости за скачком при разных значениях угла  $\beta$  отклонения потока в скачке. Это геометрическое место называется *ударной полярой* для потока со скоростью  $v_1$  (рис. 5.43).

Для того чтобы найти уравнение ударной поляры, вспомним, что скорость потока после скачка связана со скоростью до скачка уравнением (5.49). Перейдем в этом уравнении от составляющих скорости, нормальных к плоскости скачка и касательных к ней, к составляющим  $v_x$  и  $v_y$ . Как видно из рис. 5.43,

$$\begin{aligned}v_{1n} &= v_1 \sin \beta, & v_{1t} &= v_{2t} = v_1 \cos \beta, \\v_{2n} &= v_{1n} - \frac{v_{2y}}{\cos \beta} = v_1 \sin \beta - \frac{v_{2y}}{\cos \beta}.\end{aligned}$$

Подставляя эти величины в уравнение (5.49), получим:

$$v_1 \sin \beta - \frac{v_{2y}}{\cos \beta} = \frac{1}{v_1 \sin \beta} \left( v_{кр}^2 - \frac{k-1}{k+1} v_1^2 \cos^2 \beta \right). \quad (5.56)$$

Для того чтобы исключить из этого уравнения угол  $\beta$ , заметим, что из чертежа следует:

$$v_1 - v_{2x} = v_{2y} \operatorname{tg} \beta.$$

Из этого равенства находим:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \beta &= \frac{v_1 - v_{2x}}{v_{2y}}, & \sin^2 \beta &= \frac{(v_1 - v_{2x})^2}{(v_1 - v_{2x})^2 + v_{2y}^2}, \\ \cos^2 \beta &= \frac{v_{2y}^2}{(v_1 - v_{2x})^2 + v_{2y}^2}.\end{aligned}$$

Уравнение (5.56) после замены тригонометрических функций угла  $\beta$  их выражениями через скорости примет вид

$$v_1^2 \frac{(v_1 - v_{2x})^2}{(v_1 - v_{2x})^2 + v_{2y}^2} - v_1 (v_1 - v_{2x}) = v_{кр}^2 - \frac{k-1}{k+1} \frac{v_1^2 v_{2y}^2}{(v_1 - v_{2x})^2 + v_{2y}^2}.$$

Умножим обе части этого уравнения на  $(v_1 - v_{2x})^2 + v_{2y}^2$  и соберем слагаемые, содержащие одинаковые степени  $v_1 - v_{2x}$  и  $v_{2y}$ ; в результате получим:

$$\left[ \left( v_1 - \frac{v_{кр}^2}{v_1} \right) - (v_1 - v_{2x}) \right] (v_1 - v_{2x})^2 = \left[ \left( \frac{v_{кр}^2}{v_1} - \frac{k-1}{k+1} v_1 \right) + (v_1 - v_{2x}) \right] v_{2y}^2.$$

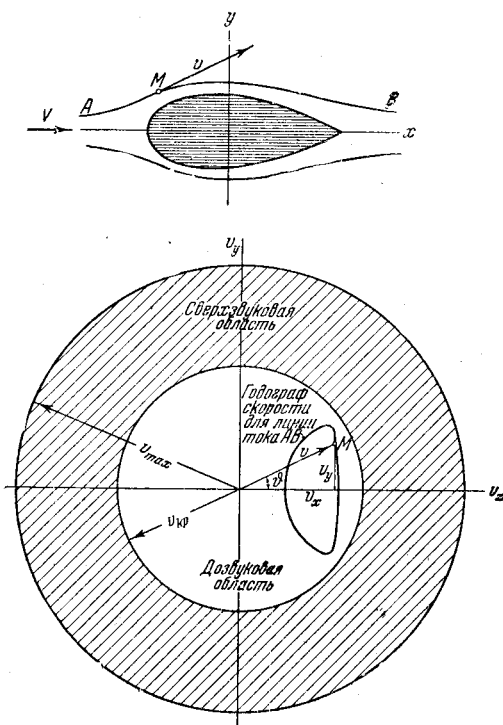


Рис. 5.42. Плоскость течения  $xu$  и плоскость голографа скорости  $v_x, v_y$ . Дозвуковая и сверхзвуковая области на плоскости голографа.

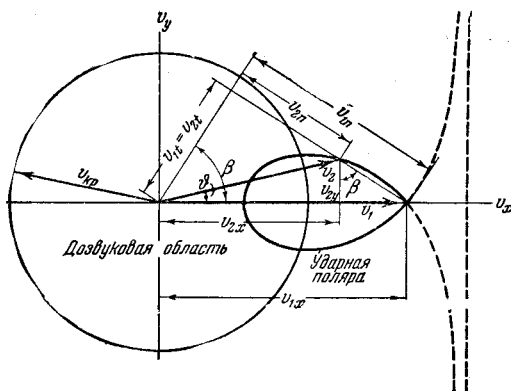


Рис. 5.43. Ударная поляр для потока со скоростью  $v_1$  (изображена сплошной линией; пунктирная часть кривой соответствует скачкам разрежения, которые в действительности не существуют).

Кривая, изображающая это уравнение на плоскости годографа скорости при заданных  $v_1$  и  $v_{кр}$ , представляет собой кривую третьего порядка. В самом деле, введя временно обозначения

$$v_1 - v_{2x} = x, \quad v_{2y} = y, \quad v_1 - \frac{v_{кр}^2}{v_1} = k_1, \quad \frac{v_{кр}^2}{v_1} - \frac{k-1}{k+1} v_1 = k_2,$$

сможем представить последнее уравнение в виде

$$(k_1 - x) x^2 = (k_2 + x) y^2,$$

или

$$y^2 = \frac{(k_1 - x) x^2}{k_2 + x}.$$

Эта кривая, как видно из ее уравнения, симметрична относительно оси  $x$ , проходит через начало координат, вторично пересекает ось абсцисс при  $x = k_1$  и уходит в бесконечность при  $x = -k_2$ . Кривая полностью определяется значениями двух параметров  $k_1$  и  $k_2$ , т. е. в конечном счете значениями скорости потока перед скачком  $v_1$  и критической скорости  $v_{кр}$  (или, что все равно,  $a_{max}$ ). Ударной полярой является замкнутая петлеобразная часть этой кривой, расположенная на рис. 5.43 левее конца вектора  $v_1$ . Ветви этой кривой, уходящие в бесконечность, соответствуют случаю, когда скорость за скачком больше, чем скорость перед скачком, т. е. соответствуют скачку разрежения, который не может существовать в действительности.

С помощью ударной поляры легко графически определить для каждого значения угла отклонения  $\vartheta$  сверхзвукового потока величину скорости  $v_2$  за скачком и угол  $\beta$  наклона плоскости скачка. Величина скорости  $v_2$  определяется длиной отрезка, проведенного из начала координат под углом  $\vartheta$  к оси абсцисс до пересечения с полярной диаграммой. При этом надо брать больший из двух возможных значений этого отрезка; меньшее из двух возможных значений скорости не соответствует условию того, что скачок является присоединенным. Для того чтобы найти угол наклона скачка, нужно провести прямую через концы векторов  $v_1$  и  $v_2$  и опустить на нее перпендикуляр; угол между этим перпендикуляром и осью абсцисс равен углу наклона скачка.

Для расчетов удобно пользоваться диаграммой, на которой нанесено семейство ударных поляр, соответствующих разным значениям скорости набегающего потока от  $v_1 = v_{кр}$  до  $v_1 = v_{max}$ . Такая диаграмма ударных поляр для воздуха представлена на рис. 5.44. На ней изображены также линии равных отношений давления торможения за скачком к давлению торможения перед скачком ( $p_{20}/p_{10} = \text{const}$ ). Это отношение представляет собой правильную дробь, так как давление торможения за скачком меньше давления торможения перед скачком. По величине этого отношения можно определить потери давления в скачке уплотнения, о чем более подробно будет идти речь в даль-

нейшем. Из диаграммы видно, что чем больше отклонение потока в скачке уплотнения (при одной и той же скорости перед скачком), тем больше в нем потери давления. Далее, из диаграммы видно, что одни и те же потери давления (в долях  $p_{20}$ ) соответствуют при больших скоростях перед скачком малым углам отклонения потока, а при малых (сверхзвуковых) скоростях — большим углам отклонения. При

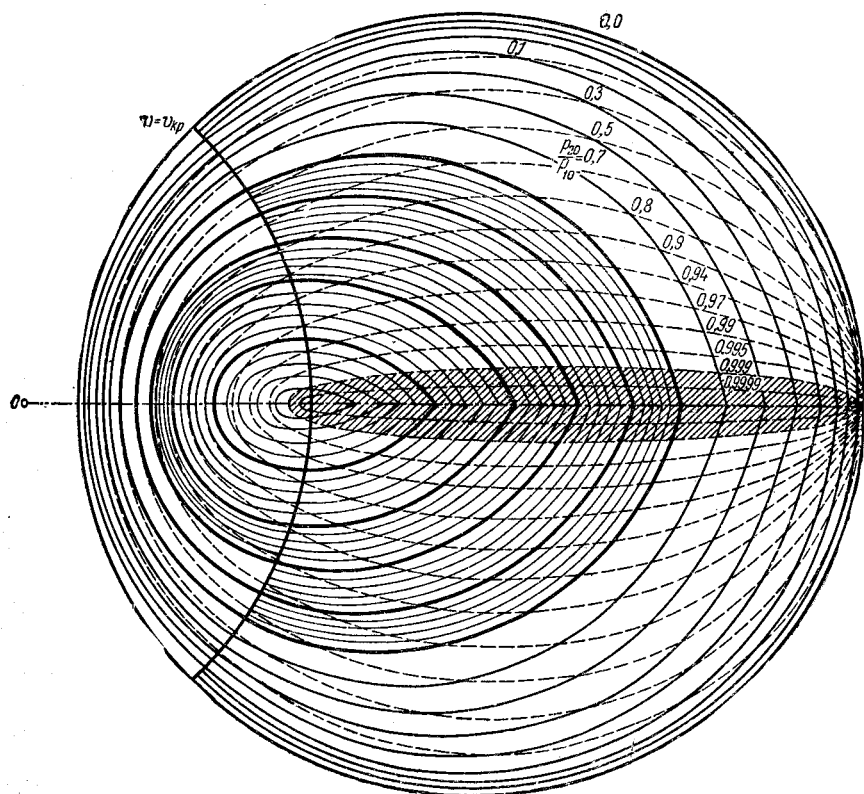


Рис. 5.44. Ударные поляры и линии равных отношений  $p_{20}/p_{10}$  для воздуха ( $k = 1,41$ ).

одном и том же отклонении потока ( $\vartheta = \text{const}$ ) потери давления в скачке увеличиваются по мере роста скорости.

Диаграмма ударных поляр показывает, кроме того, что возможно далеко не всякое отклонение плоского сверхзвукового потока от его первоначального направления. Каждому значению скорости потока перед скачком соответствует определенная величина предельного угла отклонения (не превосходящего для всех скоростей  $45^\circ$ ). Для того чтобы найти *предельный* угол отклонения потока при заданной его скорости перед скачком, нужно из начала координат плоскости

годографа провести касательную к соответствующей ударной поляре (рис. 5.45). Угол, составляемый касательной с осью абсцисс, представляет собою предельный угол отклонения потока при данной скорости перед скачком.

Если препятствие имеет носок, у которого  $\vartheta > \vartheta_{\text{пред}}$  для данной скорости набегающего потока, то получается отсоединенный скачок, линия которого проходит перед препятствием, плавно огибает его и, удаляясь, переходит в линию, вдоль которой распространяются

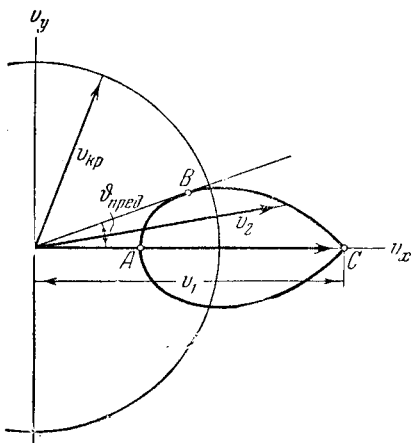


Рис. 5.45. Каждому значению скорости потока перед скачком соответствует определенная величина предельного угла отклонения потока.

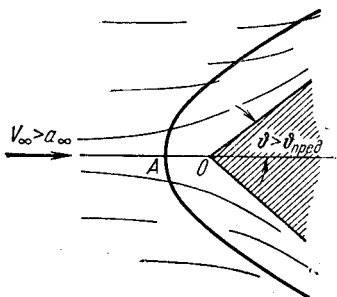


Рис. 5.46. Отсоединенный скачок уплотнения в случае  $\vartheta > \vartheta_{\text{пред}}$ .

малые возмущения в данном потоке (рис. 5.46). В отсоединенном скачке угол наклона проходит через все значения от прямого угла (прямой скачок уплотнения), которому соответствует точка A на ударной поляре (рис. 5.45), до  $\vartheta_{\text{пред}}$  и меньших углов, вплоть до угла, равного углу наклона линии распространения возмущений. Этому углу наклона соответствует точка C на ударной поляре; его величина может быть найдена, если провести касательную к ударной поляре в точке C и опустить на нее перпендикуляр из начала координат. Таким образом, в отсоединенном скачке уплотнения имеют место условия, соответствующие всем точкам ударной поляры, а в присоединенном скачке — условия, соответствующие только участку BC.

## § 21. Давление торможения за прямым скачком. Измерение скорости движения газа

При обтекании сверхзвуковым потоком закругленных спереди препятствий всегда имеет место отсоединенный скачок уплотнения, который перед препятствием является прямым скачком. В связи с этим возникает вопрос о величине давления потока в точке торможения за прямым скачком. Этот вопрос имеет большое практическое значение для правильного определения скорости сверхзвукового потока с помощью скоростной трубки.