

значениям  $M_\infty$  (приблизительно до  $M_\infty \approx 3,0—3,5$ ), стреловидные в плане крылья имеют при прочих равных условиях меньшее лобовое сопротивление, чем прямые крылья. Лишь при больших значениях числа  $M_\infty$ , когда скачки уплотнения на прямом крыле становятся такими же косыми скачками, как и скачки на стреловидном в плане крыле, лобовые сопротивления прямого и стреловидного крыльев сравниваются.

### § 23. Конический поток газа. Уравнение для потенциала скоростей конического потока

Мы уже изучали раньше плоские и симметрично осевые течения жидкости и газа. На практике часто встречается еще один частный случай двумерного течения — коническое течение, которое будет рассмотрено в этом параграфе.

Представим себе коническую поверхность, вершина которой находится в точке  $O$  (рис. 5.55), а направляющей является плоская кривая  $AB$ . В сечении этой поверхности какой-либо плоскостью, параллельной  $AB$ , получится линия  $A_1B_1$ , геометрически подобная  $AB$ . При обтекании такой поверхности сверхзвуковым потоком идеальной среды скорости в сходственных точках можно считать одинаковыми (за исключением сечения, параллельного  $AB$  и проходящего через точку  $O$ ). Иными словами, скорость в точке  $M$  будет такой же, как и в точке  $M_1$ , находящейся на луче  $OM$ . В самом деле, в идеальной среде распределение скоростей зависит не от размеров обтекаемой фигуры ( $AB$  или  $A_1B_1$ ), а только от ее формы; так как, кроме

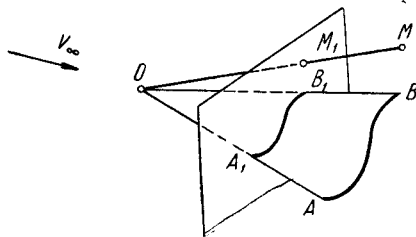


Рис. 5.55. В коническом потоке скорость, давление и другие характеристики движения одинаковы на каждой прямой, исходящей из точки  $O$ .

того, поток предполагается сверхзвуковым, то изменения давления не распространяются против течения и обтекание кормовой части конуса не влияет на обтекание носовой. *Течение жидкости, в котором скорость, давление, плотность и другие характеристики движения одинаковы вдоль каждой*

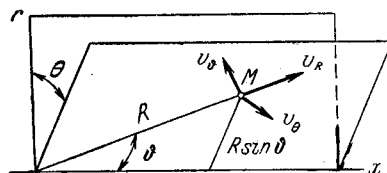


Рис. 5.56. Компоненты скорости  $v_R$ ,  $v_\theta$ ,  $v_\varphi$  являются в коническом потоке функциями только  $\vartheta$  и  $\theta$  и не зависят от  $R$ .

в случае, когда конический поток может быть представлен в виде

$$\varphi = R\Phi(\theta, \vartheta); \quad (5.66)$$

в самом деле, в этом случае компоненты скорости  $v_R$ ,  $v_\theta$ ,  $v_\varphi$  не зависят

*прямой, исходящей из некоторого центра, называется коническим течением.* Такое течение имеет место, например, при сверхзвуковом обтекании тонких треугольных крыльев, круговых конусов и т. д.

Если ввести сферическую систему координат с началом в точке  $O$ , то в коническом потоке скорость, давление и плотность не будут зависеть от радиуса-вектора точки  $R$ ; они будут полностью определяться в каждой точке полярными углами  $\theta$  и  $\vartheta$  (рис. 5.56).

Если ввести сферическую систему координат с началом в точке  $O$ , то в коническом потоке скорость, давление и плотность не будут зависеть от радиуса-вектора точки  $R$ ; они будут полностью определяться в каждой точке полярными углами  $\theta$  и  $\vartheta$  (рис. 5.56).

от  $R$  и определяются формулами:

$$\begin{aligned} v_R &= \frac{\partial \varphi}{\partial R} = \Phi(\theta, \vartheta), & v_\vartheta &= \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}, \\ v_\theta &= \frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Общее уравнение для потенциала скоростей конического потока можно получить из уравнения для потенциала скоростей (гл. IV) в сферических координатах, подставляя в него вместо  $\varphi$  его последнее выражение. В результате будем иметь:

$$\begin{aligned} & \left[ 1 - \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vartheta^2} + \left[ 1 - \frac{1}{a^2 \sin^2 \vartheta} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)^2 \right] \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \\ & + \left\{ 2 - \frac{1}{a^2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)^2 \right] \right\} \Phi - \frac{2}{a^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial \vartheta} + \\ & + \operatorname{ctg} \vartheta \left[ 1 + \frac{1}{a^2} \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)^2 \right] \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = 0. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Мы будем рассматривать, далее, обтекание кругового конуса потоком газа, направленным вдоль его оси. Течение является при этом не только коническим, но и симметрично осевым, т. е.  $\Phi$  не зависит от  $\theta$ . Уравнение (5.68) для потенциала скоростей в этом случае упрощается и принимает следующий вид:

$$\left[ 1 - \frac{1}{a^2} \left( \frac{d\Phi}{d\vartheta} \right)^2 \right] \frac{d^2 \Phi}{d\vartheta^2} + \left[ 2 - \frac{1}{a^2} \left( \frac{d\Phi}{d\vartheta} \right)^2 \right] \Phi + \operatorname{ctg} \vartheta \frac{d\Phi}{d\vartheta} = 0. \quad (5.69)$$

Скорость звука  $a$  связана со скоростью движения газа  $v$  уравнением энергии

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \operatorname{const} = \frac{v_{\max}^2}{2},$$

где  $v_{\max}$  есть максимальная скорость адиабатического течения. Из последнего уравнения следует:

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{k-1}{2} (v_{\max}^2 - v^2) = \frac{k-1}{2} (v_{\max}^2 - v_R^2 - v_\vartheta^2) = \\ &= \frac{k-1}{2} \left[ v_{\max}^2 - \Phi^2 - \left( \frac{d\Phi}{d\vartheta} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в уравнение (5.69), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции  $\Phi$  в случае обтекания кругового конуса вдоль его оси:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{k-1}{2} (v_{\max}^2 - \Phi^2) - \frac{k+1}{2} \left( \frac{d\Phi}{d\vartheta} \right)^2 \right] \frac{d^2 \Phi}{d\vartheta^2} + \\ & + \left[ (k-1) (v_{\max}^2 - \Phi^2) - k \left( \frac{d\Phi}{d\vartheta} \right)^2 \right] \Phi + \\ & + \frac{k-1}{2} \operatorname{ctg} \vartheta \left[ (v_{\max}^2 - \Phi^2) - \left( \frac{d\Phi}{d\vartheta} \right)^2 \right] \frac{d\Phi}{d\vartheta} = 0. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Уравнение (5.70) должно быть проинтегрировано при следующих граничных условиях: на поверхности конуса, т. е. при  $\vartheta = \vartheta_{\text{кон}}$ ,  $d\Phi/d\vartheta = 0$ ; на

поверхности скачка уплотнения должны выполняться условия (5.38) и (5.49). Из этих трех условий определяются две постоянные интегрирования и угол  $\vartheta$  наклона скачка. Точное решение уравнения (5.70) не получено, поэтому в дальнейшем укажем различные способы приближенного определения поля скоростей в области между поверхностями скачка и конуса. Здесь же отметим только некоторые особенности течения около конуса.

Если угол между осью и образующей конуса  $\vartheta_k$  мал по величине, то вблизи поверхности конуса, т. е. при малых  $\vartheta$  компонента скорости  $v_\vartheta$  также будет мала. Пренебрегая в данном случае квадратом этой компоненты, будем иметь упрощенное уравнение для  $\Phi$  в области, прилегающей к поверхности конуса:

$$\Phi'' + 2\Phi + \Phi' \operatorname{ctg} \vartheta = 0. \quad (5.71)$$

Даже из такого упрощенного уравнения для  $\Phi$  видно, что  $\Phi \neq \text{const}$ , и следовательно,  $v_R$  и  $v_\vartheta$  имеют разную величину на различных лучах, исходящих из вершины конуса. Результирующая скорость имеет, таким образом, вблизи конуса переменное направление. В этом состоит коренное отличие обтекания конуса от обтекания клина (и причина того, что обтекание конуса является более сложным, нежели обтекание клина). Для того чтобы показать это, вспомним уравнение для потенциала скоростей плоского потока газа

$$\left[1 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2\right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left[1 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{2}{a^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0.$$

Из этого уравнения и граничного условия на поверхности клина ( $v_y/v_x = \text{const}$ ) видно, что и уравнение, и граничное условие удовлетворяются, если во всей области между скачком уплотнения и клином положить  $v_y = \text{const}$  и  $v_x = \text{const}$ . Таким образом, во всей этой области линии тока параллельны поверхности клина, скорость и давление постоянны и не происходит ни сжатия, ни разрежения среды.

Уравнение (5.70) может быть проинтегрировано методом последовательных приближений. С этой целью приведем его, с помощью элементарных алгебраических преобразований, к следующему виду:

$$\Phi'' + 2\Phi + \Phi' \operatorname{ctg} \vartheta = \frac{2}{k-1} \frac{\Phi'' + \Phi}{v_{\max}^2 - v^2} \Phi'^2.$$

Так как  $2(\Phi'' + \Phi)\Phi' = (v^2)'$ , то это уравнение можно представить также в иной форме, более удобной для интегрирования:

$$\frac{\Phi''}{\Phi'} + \frac{1}{k-1} \frac{(v_{\max}^2 - v^2)'}{(v_{\max}^2 - v^2)} + \operatorname{ctg} \vartheta = -2 \frac{\Phi}{\Phi'}.$$

Интегрируя почленно это уравнение, находим:

$$\Phi' = \frac{e^{-2 \int \frac{\Phi}{\Phi'} d\vartheta}}{(v_{\max}^2 - v^2)^{1/(k-1)} \sin \vartheta}.$$

Последнее соотношение позволяет, зная  $\Phi$  и  $\Phi'$  в первом приближении, подставить их под знак интеграла и вычислить  $\Phi'$ , а затем и  $\Phi$  во втором приближении. В качестве первого приближения, как показывает более подробный анализ, целесообразно взять следующую зависимость между  $\Phi'$  и  $v$ :

$$\Phi'^2 = A^2 v^2 - B^2.$$

Если угол наклона конического скачка известен, то величины  $A$  и  $B$  могут быть выражены через значения скорости на поверхности скачка и поверхности конуса: на поверхности конуса  $\Phi' = 0$ ,  $v = v_{\text{кон}}$ , на поверхности скачка уплотнения  $\Phi' = -v_{2n}$ ,  $v = v_2$ , где  $v_2$  и  $v_{2n}$  — скорость непосредственно за скачком и ее нормальная составляющая. Из этих условий получается:

$$A = \frac{v_{2n}}{\sqrt{v_2^2 - v_{\text{кон}}^2}}, \quad B = \frac{v_{2n} v_{\text{кон}}}{\sqrt{v_2^2 - v_{\text{кон}}^2}}.$$

Зависимость между  $\Phi'$  и  $v$  в первом приближении после подстановки  $v^2 = \Phi^2 + \Phi'^2$  принимает вид

$$(A^2 - 1) \Phi'^2 + A^2 \Phi^2 = B^2.$$

Интегрируя это уравнение и удовлетворяя граничному условию на поверхности конуса, получаем  $\Phi$  и  $\Phi'$  в первом приближении:

$$\Phi_I = \frac{B}{A} \cos \frac{A}{\sqrt{A^2 - 1}} (\vartheta - \vartheta_k), \quad \Phi'_I = -\frac{B}{\sqrt{A^2 - 1}} \sin \frac{A}{\sqrt{A^2 - 1}} (\vartheta - \vartheta_k).$$

Во втором приближении находим, как описано выше:

$$\left. \begin{aligned} \Phi'_{II} &= \frac{C \left[ \sin \frac{A}{\sqrt{A^2 - 1}} (\vartheta - \vartheta_k) \right]^{2(A^2 - 1)/A^2}}{(v_{\text{max}}^2 - v^2)^{1/(k-1)} \sin \vartheta}, \\ \Phi_{II} &= v_{\text{кон}} + \int_{\vartheta_k}^{\vartheta} \Phi'_{II} d\vartheta; \end{aligned} \right\} \quad (5.72)$$

здесь  $C$  есть постоянная интегрирования, которая определяется из граничного условия: на поверхности скачка  $\Phi' = -v_{2n}$ .

Для вычисления  $v_{\text{кон}}$  следует положить в последней формуле верхний предел в интеграле  $\vartheta = \beta$ , где  $\beta$  есть угол наклона скачка; тогда  $\Phi$  будет равно  $v_{2t}$  и из формулы определится  $v_{\text{кон}}$ .

Можно вычислить  $\Phi$  и  $v_{\text{кон}}$ , не прибегая к интегрированию и решению трансцендентного уравнения для  $v_{\text{кон}}$ , если воспользоваться следующими упрощенными формулами:

$$\Phi_{II} = v_{2t} + v_{2n} \frac{\sqrt{A^2 - 1}}{A} \frac{\cos \frac{A}{\sqrt{A^2 - 1}} (\beta - \vartheta_k) - \cos \frac{A}{\sqrt{A^2 - 1}} (\vartheta - \vartheta_k)}{\sin \frac{A}{\sqrt{A^2 - 1}} (\beta - \vartheta_k)},$$

$$v_{\text{кон}} = v_{2t} - \frac{1}{2} v_{2n} (\beta - \vartheta_k) \left[ 1 + \frac{1}{3} \frac{\beta - \vartheta_k}{(\beta - \vartheta_k) - 4 \frac{v_{2t}}{v_{2n}}} \right].$$

Расчеты показывают, что обычно можно пренебречь вторым слагаемым в квадратных скобках по сравнению с первым; тогда для  $v_{\text{кон}}$  получается еще более простая формула, линейная относительно  $\beta - \vartheta_k$ :

$$v_{\text{кон}} = v_{2t} - \frac{1}{2} v_{2n} (\beta - \vartheta_k).$$

Уравнение (5.70) может быть также проинтегрировано численными методами.

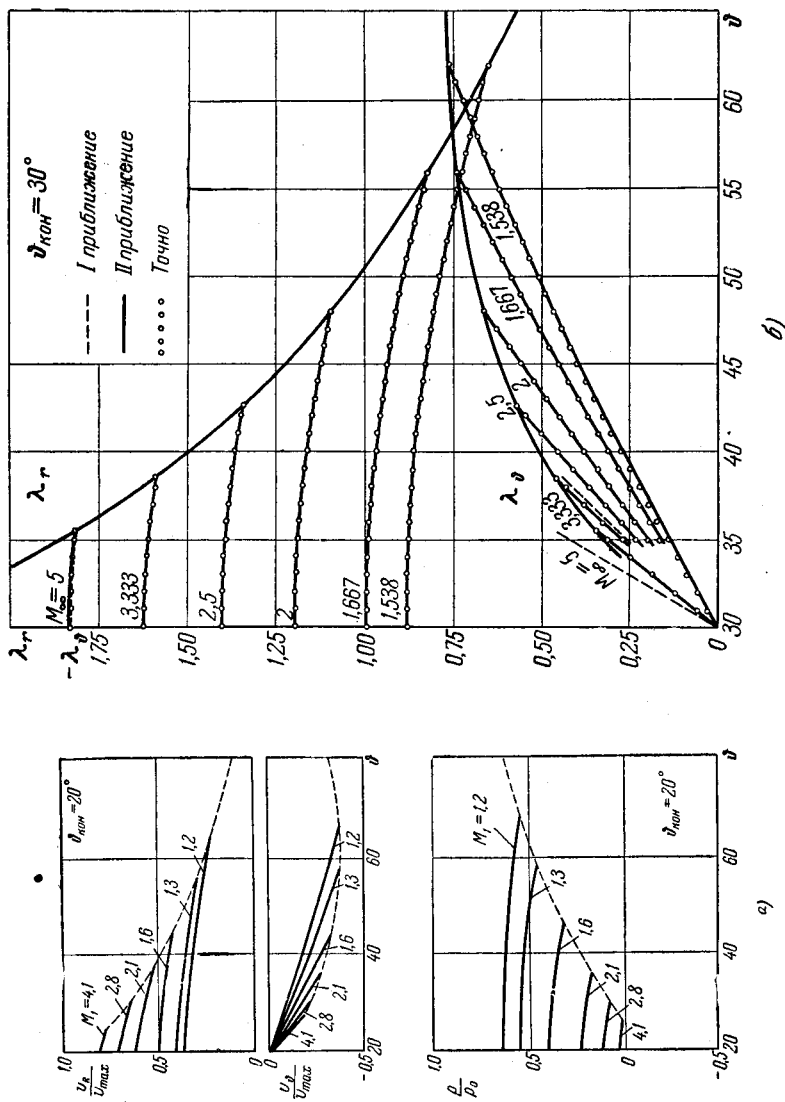


Рис. 5.57. Распределение компоненты скорости и давления между поверхностью конуса и скачком уплотнения. При приближении к поверхности конуса давление нарастает.

Приближенное интегрирование уравнения (5.70) показывает, что в области между скачком уплотнения и поверхностью конуса радиальная составляющая скорости  $v_R$  при приближении к поверхности конуса возрастает, составляющая, перпендикулярная к радиусу  $v_\theta$  — убывает (по абсолютной величине). Результирующая скорость при приближении к поверхности конуса по модулю убывает и, следовательно, давление нарастает. Эти изменения компонент скорости и давления иллюстрируются рис. 5.57, на котором изображены расчетные данные (полученные численным интегрированием) для конуса, имеющего угол  $\vartheta_{\text{кон}} = 20^\circ$ , и данные, полученные методом последовательных приближений для  $\vartheta_{\text{кон}} = 30^\circ$ .

В отличие от обтекания клина, где скорость и давление постоянны во всей рассматриваемой области, при обтекании конуса наименьшая скорость и наибольшее давление получаются на поверхности конуса, и таким образом, между скачком уплотнения и поверхностью конуса происходит в этом случае изэнтропическое сжатие среды.

## § 24. Конический скачок уплотнения. Применение метода годографа скорости к расчету обтекания конуса

Ранее (§§ 19—20) уже были рассмотрены основные соотношения, характеризующие плоский скачок уплотнения и, в частности, была выведена зависимость между углом раствора клина, обтекаемого сверхзвуковым потоком, и углом наклона скачка, который при этом получается. В расчете обтекания конуса сверхзвуковым потоком приходится иметь дело с коническим скачком уплотнения, для которого упомянутая зависимость отличается от зависимости для плоского скачка.

Общие уравнения для скачка уплотнения (т. е. уравнения энергии, расхода и импульса), выведенные ранее, справедливы и для конического скачка.

Точно так же соотношение между углом отклонения потока в скачке и углом наклона скачка не изменяется в случае конического скачка. В самом деле, как видно из чертежа (рис. 5.58), обозначив угол отклонения потока в коническом скачке через  $\Theta$ , сможем написать:

$$\begin{aligned} v_{1n} &= v_1 \sin \beta, & v_{1t} &= v_1 \cos \beta, \\ v_{2n} &= v_2 \sin (\beta - \Theta), & v_{2t} &= v_2 \cos (\beta - \Theta), \end{aligned}$$

откуда

$$\operatorname{tg} (\beta - \Theta) = \frac{v_{2n}}{v_{2t}}.$$

Подставляя вместо  $v_{2n}$  и  $v_{2t}$  их выражения по формулам (5.41) и (5.38) и повторяя затем вычисления, выполненные в § 19 для плоского скачка, придем к формуле, тождественной с формулой (5.55):

$$\operatorname{ctg} \Theta = \operatorname{tg} \beta \left[ \frac{k+1}{2} \frac{M_1^2}{M_1^2 \sin^2 \beta - 1} - 1 \right].$$

Так как за скачком радиальная составляющая скорости  $v_R$  при приближении к поверхности конуса непрерывно увеличивается, а перпендикулярная

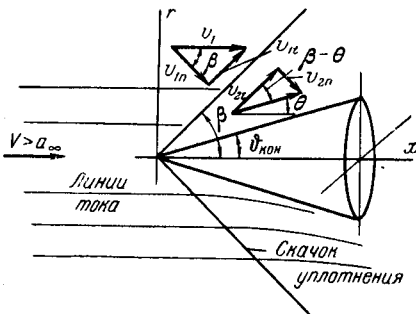


Рис. 5.58. Схема к вычислению угла наклона конического скачка уплотнения.