

Приближенное интегрирование уравнения (5.70) показывает, что в области между скачком уплотнения и поверхностью конуса радиальная составляющая скорости v_R при приближении к поверхности конуса возрастает, составляющая, перпендикулярная к радиусу v_θ — убывает (по абсолютной величине). Результирующая скорость при приближении к поверхности конуса по модулю убывает и, следовательно, давление нарастает. Эти изменения компонент скорости и давления иллюстрируются рис. 5.57, на котором изображены расчетные данные (полученные численным интегрированием) для конуса, имеющего угол $\vartheta_{\text{кон}} = 20^\circ$, и данные, полученные методом последовательных приближений для $\vartheta_{\text{кон}} = 30^\circ$.

В отличие от обтекания клина, где скорость и давление постоянны во всей рассматриваемой области, при обтекании конуса наименьшая скорость и наибольшее давление получаются на поверхности конуса, и таким образом, между скачком уплотнения и поверхностью конуса происходит в этом случае изэнтропическое сжатие среды.

§ 24. Конический скачок уплотнения. Применение метода годографа скорости к расчету обтекания конуса

Ранее (§§ 19—20) уже были рассмотрены основные соотношения, характеризующие плоский скачок уплотнения и, в частности, была выведена зависимость между углом раствора клина, обтекаемого сверхзвуковым потоком, и углом наклона скачка, который при этом получается. В расчете обтекания конуса сверхзвуковым потоком приходится иметь дело с коническим скачком уплотнения, для которого упомянутая зависимость отличается от зависимости для плоского скачка.

Общие уравнения для скачка уплотнения (т. е. уравнения энергии, расхода и импульса), выведенные ранее, справедливы и для конического скачка.

Точно так же соотношение между углом отклонения потока в скачке и углом наклона скачка не изменяется в случае конического скачка. В самом деле, как видно из чертежа (рис. 5.58), обозначив угол отклонения потока в коническом скачке через Θ , сможем написать:

$$\begin{aligned} v_{1n} &= v_1 \sin \beta, & v_{1t} &= v_1 \cos \beta, \\ v_{2n} &= v_2 \sin (\beta - \Theta), & v_{2t} &= v_2 \cos (\beta - \Theta), \end{aligned}$$

откуда

$$\operatorname{tg} (\beta - \Theta) = \frac{v_{2n}}{v_{2t}}.$$

Подставляя вместо v_{2n} и v_{2t} их выражения по формулам (5.41) и (5.38) и повторяя затем вычисления, выполненные в § 19 для плоского скачка, придем к формуле, тождественной с формулой (5.55):

$$\operatorname{ctg} \Theta = \operatorname{tg} \beta \left[\frac{k+1}{2} \frac{M_1^2}{M_1^2 \sin^2 \beta - 1} - 1 \right].$$

Так как за скачком радиальная составляющая скорости v_R при приближении к поверхности конуса непрерывно увеличивается, а перпендикулярная

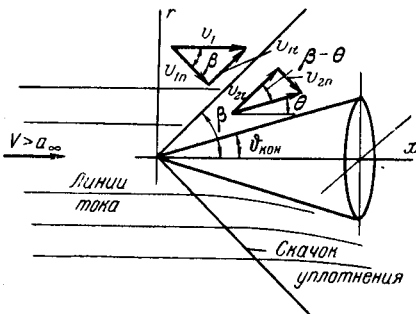


Рис. 5.58. Схема к вычислению угла наклона конического скачка уплотнения.

к ней составляющая v_θ уменьшается (по модулю), то угол наклона результирующей скорости увеличивается. Поэтому угол наклона образующей конуса $\vartheta_{\text{кон}}$ оказывается большим, нежели θ : $\vartheta_{\text{кон}} > \theta$. Как известно, при

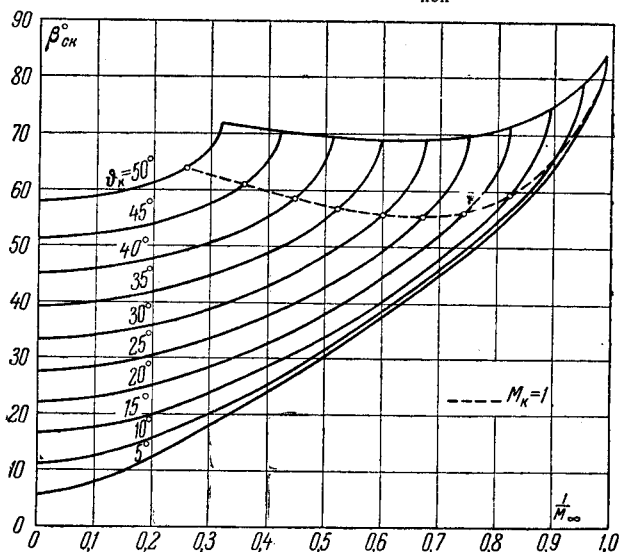


Рис. 5.59. Зависимость угла наклона конического скачка уплотнения от числа M_∞ набегающего потока при разных величинах угла $\vartheta_{\text{кон}}$.

обтекании клина угол отклонения потока ϑ равен углу $\vartheta_{\text{кл}}$; следовательно, $\vartheta_{\text{кон}}$ будет большим, чем угол $\vartheta_{\text{кл}}$, соответствующий тем же, что у конуса, значениям β и M_1 . Иными словами, угол наклона скачка при прочих равных

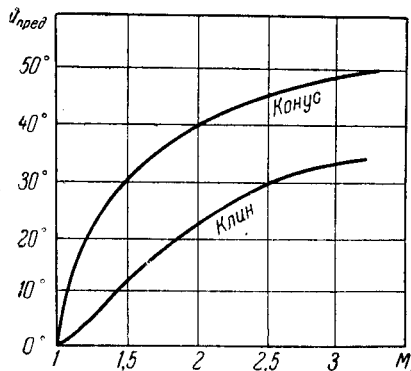


Рис. 5.60. Предельный угол наклона образующей конуса и клина в зависимости от числа M_1 .

условиях будет у конуса меньше, чем у клина с таким же углом раствора. Зависимость угла наклона конического скачка от M_1 и угла наклона образующей конуса, полученная расчетным путем, в результате численного интегрирования уравнения (5.70), представлена на рис. 5.59. Как и в случае плоского скачка, здесь соответствуют действительности лишь меньшие из двух возможных значений β , т. е. значения, расположенные ниже пунктирной кривой. Так же, как и в случае плоского скачка, для каждого числа M_1 существует предельный угол наклона образующей конуса, при котором еще возможно его обтекание с присоединенным коническим скачком; при углах наклона образующей, больших предельного, скачок становится отсоединенным. Эти предельные значения $\vartheta_{\text{кон}}$ соответствуют (при каждом M_1) точкам на пунктирной кривой рис. 5.59. Зависимость предельного значения $\vartheta_{\text{кон}}$ от M_1 представлена отдельно на рис. 5.60; там же для сравнения нанесены предельные углы клина, при которых еще возможно его обтекание с при-

соединенным плоским скачком. Как видим, *предельные углы конуса* при одних и тех же значениях M_1 *больше предельных углов клина*.

Так как угол наклона скачка при обтекании конуса меньше, чем при обтекании клина с тем же углом раствора и при том же значении числа M набегающего потока, то *потери энергии в скачке будут в случае конуса меньшими, чем в случае клина* при прочих равных условиях. Поэтому сжатие потока в коническом скачке уплотнения является более выгодным процессом, чем сжатие потока в плоском скачке.

Для расчета потока, обтекающего конус, можно применять наряду с уравнением (5.70) также метод годографа скорости. В данном случае,

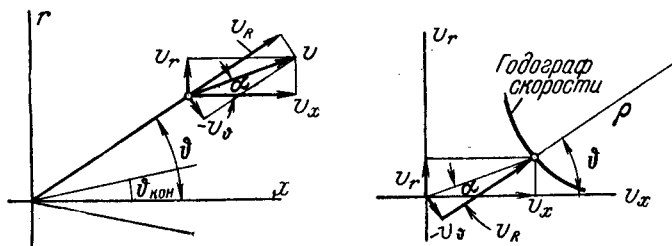


Рис. 5.61. Меридиональная плоскость течения x, r и плоскость годографа скорости v_x, v_r .

когда поток симметрично осевой, по осям координат плоскости годографа откладываются компоненты скорости в цилиндрической системе координат v_x и v_r (рис. 5.61).

Составим уравнение годографа скорости. Выразим с этой целью компоненты скорости в цилиндрической системе координат v_x и v_r через компоненты скорости в полярной системе v_R и v_ϑ . Из чертежа (рис. 5.61) видно, что

$$v_x = v_R \cos \vartheta - v_\vartheta \sin \vartheta, \quad v_r = v_R \sin \vartheta + v_\vartheta \cos \vartheta.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dv_x}{d\vartheta} = -v_R \sin \vartheta + \frac{dv_R}{d\vartheta} \cos \vartheta - v_\vartheta \cos \vartheta - \frac{dv_\vartheta}{d\vartheta} \sin \vartheta,$$

$$\frac{dv_r}{d\vartheta} = v_R \cos \vartheta + \frac{dv_R}{d\vartheta} \sin \vartheta - v_\vartheta \sin \vartheta + \frac{dv_\vartheta}{d\vartheta} \cos \vartheta,$$

и так как в коническом потенциальном потоке выполняется соотношение

$$\frac{dv_R}{d\vartheta} = v_\vartheta,$$

то

$$\frac{dv_x}{d\vartheta} = -\left(v_R + \frac{dv_\vartheta}{d\vartheta}\right) \sin \vartheta, \quad \frac{dv_r}{d\vartheta} = \left(v_R + \frac{dv_\vartheta}{d\vartheta}\right) \cos \vartheta.$$

Элемент дуги ds годографа скорости определяется выражением

$$(ds)^2 = (dv_x)^2 + (dv_r)^2 = \left(v_R + \frac{dv_\vartheta}{d\vartheta}\right)^2 (d\vartheta)^2.$$

Мы можем теперь найти радиус кривизны \mathfrak{R} годографа скорости, равный $ds/d\vartheta$:

$$\mathfrak{R} = \frac{ds}{d\vartheta} = v_R + \frac{dv_\vartheta}{d\vartheta} = \Phi + \frac{d^2\Phi}{d\vartheta^2}.$$

Исключим отсюда производную $dv_\vartheta/d\vartheta$ с помощью уравнения (5.69). Из этого уравнения следует:

$$\frac{dv_\vartheta}{d\vartheta} = \frac{d^2\Phi}{d\vartheta^2} = - \frac{\left(2 - \frac{v_\vartheta^2}{a^2}\right)v_R - v_\vartheta \operatorname{ctg} \vartheta}{1 - \frac{v_\vartheta^2}{a^2}}.$$

Подставляя последнее выражение в формулу для радиуса кривизны, получим:

$$\Re = - \frac{v_R + v_\vartheta \operatorname{ctg} \vartheta}{1 - \frac{v_\vartheta^2}{a^2}} = - \frac{\Phi + \frac{d\Phi}{d\vartheta} \operatorname{ctg} \vartheta}{1 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{d\Phi}{d\vartheta}\right)^2},$$

или в безразмерном виде

$$\frac{\Re}{v_{\max}} = - \frac{\frac{v_R}{v_{\max}} + \frac{v_\vartheta}{v_{\max}} \operatorname{ctg} \vartheta}{1 - \frac{v_\vartheta^2}{a^2}}; \tag{5.73}$$

здесь a^2 определяется, как и в предыдущем параграфе, соотношением

$$a^2 = \frac{k-1}{2} (v_{\max}^2 - v_R^2 - v_\vartheta^2). \tag{5.74}$$

Уравнение годографа скорости (5.73) используется в графоаналитическом методе, предложенном Бузезаном для построения потока, обтекающего конус.

Метод Бузезана состоит в следующем. Допустим, что нам известна скорость v_{R0} на поверхности конуса. Так как v_ϑ на поверхности конуса

равно нулю, то из формулы (5.73) получаем:

$$\frac{\Re}{v_{\max}} = - \frac{v_{R0}}{v_{\max}}.$$

Последнее равенство позволяет, задавшись малым углом $\delta_1\vartheta$, построить элемент дуги годографа скорости (рис. 5.62).

С этой целью, проведя на плоскости годографа прямую из начала координат под углом, равным $\vartheta_{\text{кон}}$, откладываем на ней от конца вектора v_{R0} (или v_{R0}/v_{\max} , если годограф строится в безразмерном виде) равный $\delta_1\vartheta$ и получаем точку C_0 , которая представляет собой

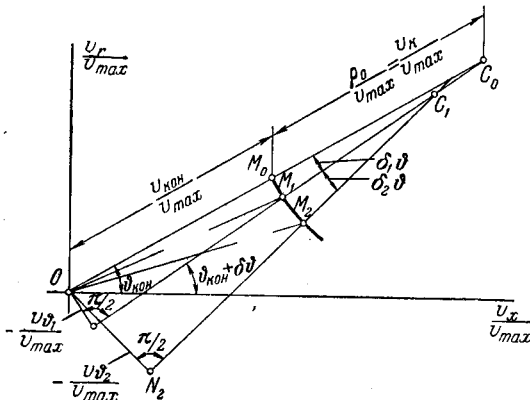


Рис. 5.62. Построение годографа скорости графоаналитическим методом.

центр кривизны годографа для точки M_0 . Из этого центра радиусом, равным C_0M_0 , описываем дугу M_0M_1 и, таким образом, находим точку M_1 , которую приближенно можно считать находящейся на годографе скорости. Прямая C_0M_1 пересекает ось абсцисс под углом, равным $\vartheta_0 + \delta_1\vartheta$, т. е. имеет такое же направление, как вектор v_R для точки M_1 . Опустив на эту прямую перпендикуляр из начала координат, найдем векторы v_{R1} и $v_{\vartheta 1}$, а соединив начало координат с точкой M_1 — результирующую скорость v_1 .

Зная v_{R1} и $v_{\theta 1}$, можно по формулам (5.73) и (5.74) вычислить радиус кривизны годографа скорости в точке M_1 , отложить его величину M_1C_1 на прямой M_1C_0 и затем, задавшись малым углом $\delta_2\delta$, повторить описанное построение. Так, по элементам дуги шаг за шагом может быть построен

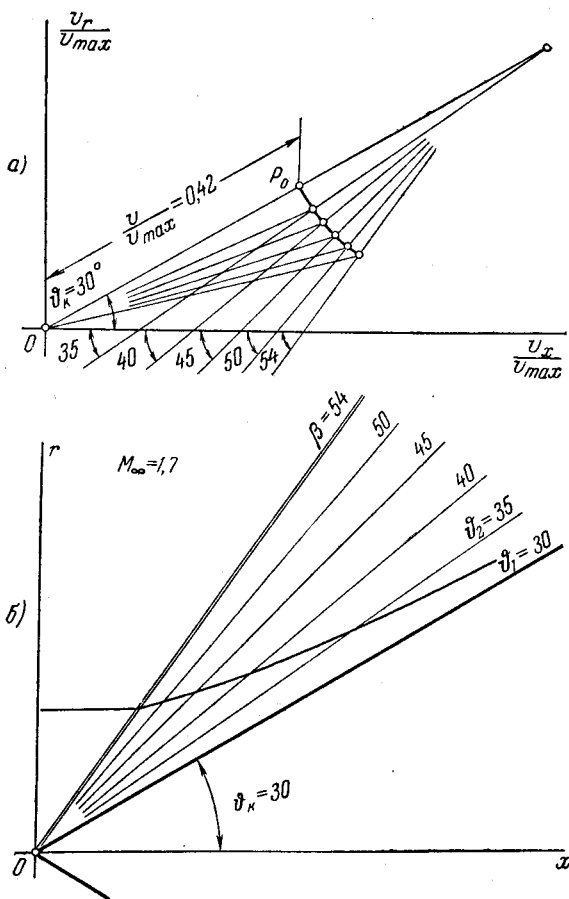


Рис. 5.63. Годограф скорости и линии тока для конуса с углом $\vartheta_{кон} = 30^\circ$ при $M_1 = 1.7$.

весь годограф скорости, вплоть до угла ϑ , равного углу наклона β конического скачка. При этом на поверхности скачка должны быть удовлетворены граничные условия (5.38) и (5.49).

Найденные при построении годографа скорости величины v_1, v_2, \dots переносятся затем на лучи, проведенные из начала координат на плоскости x, r под углами, соответственно равными $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots$, и по этим скоростям могут быть проведены линии тока. Такое построение для конуса с углом между образующей и осью, равным 30° , и для $M_1 = 1.7$ показано на рис. 5.63. На чертеже изображена одна линия тока, остальные строятся

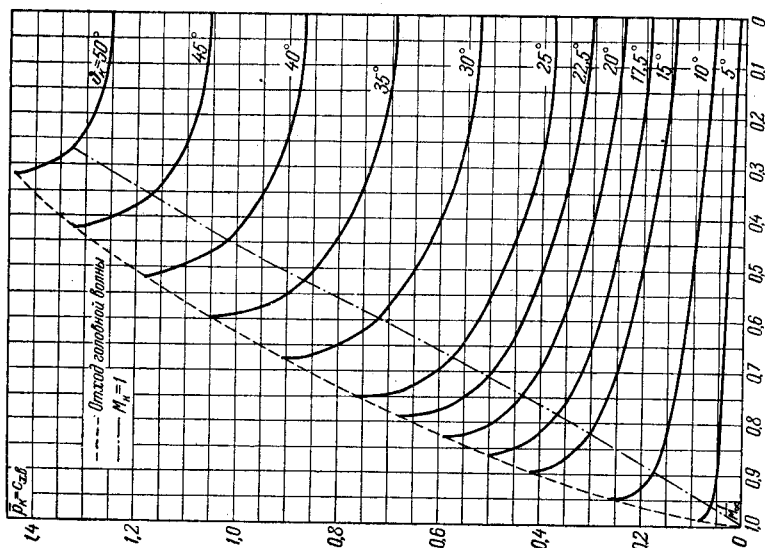


Рис. 5.65. Зависимость коэффициента давления на поверхности конуса от угла θ кон и числа M_1 набегающего потока.

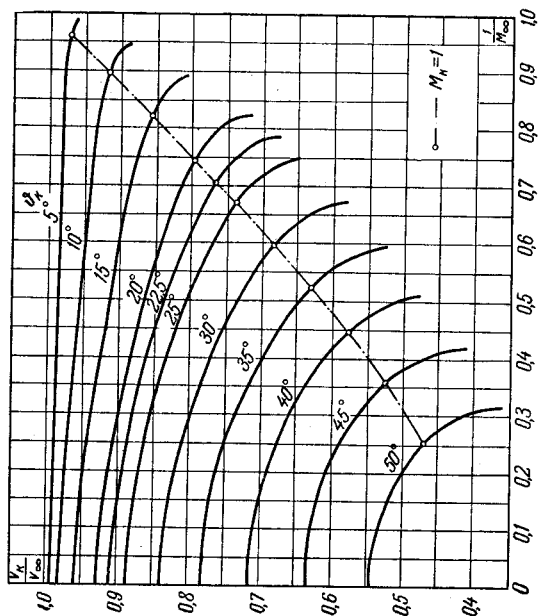


Рис. 5.64. Зависимость скорости на поверхности конуса от угла θ кон и числа M_1 набегающего потока.

аналогично, принимая во внимание, что в коническом потоке скорость остается неизменной вдоль каждого луча, исходящего из вершины.

Необходимая для построения годографа величина скорости на поверхности конуса v_{R0} определяется по углу $\vartheta_{\text{кон}}$ и числу M_1 набегающего потока с помощью графика, изображенного на рис. 5.64, а соответствующий угол наклона конического скачка — по рис. 5.59.

Коэффициент давления на поверхности конуса изображен для разных значений $\vartheta_{\text{кон}}$ в зависимости от числа M_1 на рис. 5.65.

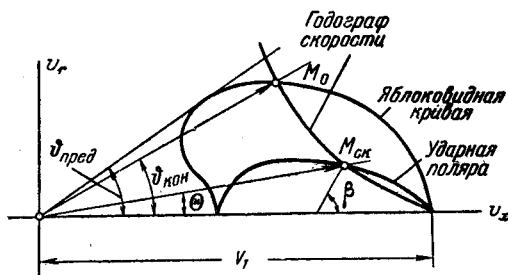


Рис. 5.66. Годограф скорости для области между скачком уплотнения и поверхностью конуса имеет свои крайние точки на ударной поляре и яблоковидной кривой.

Построение годографа скорости можно начинать и от точки, соответствующей поверхности скачка уплотнения. В этом случае начальные значения компонент скорости v_R и v_θ за скачком определяются с помощью основных уравнений скачка по величинам, характеризующим поток перед скачком, или графически — с помощью ударной поляры.

Если построить для данного числа M_1 набегающего потока годографы скорости различных конусов, то крайние точки этих годографов будут находиться, с одной стороны — на ударной поляре для данного значения M_1 ,

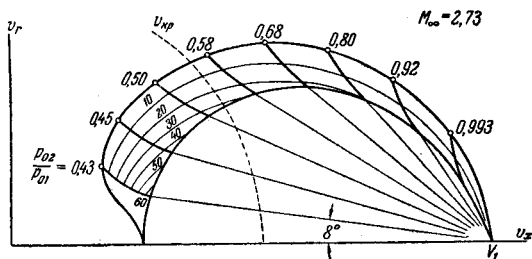


Рис. 5.67. Яблоковидная кривая, ударная поляра и годографы скорости для конусов при числе $M_1 = 2,73$. На каждом годографе скорости указан коэффициент восстановления давления.

с другой стороны — на кривой, которая называется яблоковидной (рис. 5.66); она представляет собой, иными словами, геометрическое место конца вектора скорости на поверхности конуса при данном значении M_1 набегающего потока и различных углах раствора конуса.

Яблоковидная кривая позволяет, зная угол $\vartheta_{\text{кон}}$ между осью конуса и его образующей, найти величину скорости на поверхности конуса. С ее помощью можно также найти предельный угол $\vartheta_{\text{кон}}$ для данного M_1 ; с этой целью нужно из начала координат плоскости годографа провести касательную

к яблоковидной кривой: угол наклона касательной к оси абсцисс представляет собою величину предельного угла $\varphi_{\text{кон}}^*$, т. е. наибольшего угла, при котором скачок уплотнения остается присоединенным. Если, кроме яблоковидной кривой, на чертеж нанесены ударная поляра и годографы скорости для данного значения M_1 , то могут быть определены и все другие величины характеризующие кинематическую сторону движения в области между поверхностью конуса и скачком уплотнения. По ударной поляре можно найти вектор скорости потока за скачком, угол наклона скачка и угол отклонения потока в скачке; по годографу скорости для данного конуса — величину скорости и угол отклонения по-

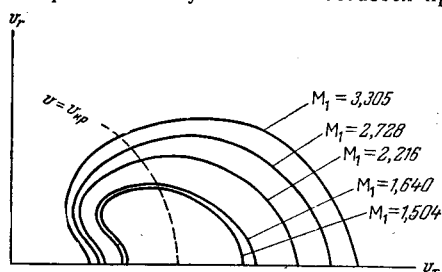


Рис. 5.68. Яблоковидные кривые для конусов различных значениях числа M_1 .

тока на каждом луче, исходящем из вершины конуса. Такая совокупность кривых для числа $M_1 = 2,73$ представлена в качестве примера на рис. 5.67. Семейство яблоковидных кривых для различных значений M_1 изображено на рис. 5.68.

§ 25. Обтекание тонкого малоизогнутого тела потоком газа. Основные формулы теории малых возмущений (линейной теории движения газа)

Вернемся теперь к вопросу о расчете поля скоростей при обтекании тела потенциальным потоком идеального газа. Как известно из § 10, если считать газ баротропной средой, то потенциал скоростей потока должен удовлетворять уравнению (5.22) и граничным условиям на поверхности тела и в бесконечности. Однако это уравнение является нелинейным уравнением второго порядка в частных производных, и его решение при современном уровне математики весьма затруднительно. Так как на практике все же необходимо рассчитывать скорости, давления и другие величины при движении тела в газовой среде, то возникли и получили развитие различные приближенные способы решения этого уравнения. Наибольшее распространение при решении практических задач получил так называемый *метод малых возмущений*, изложению которого посвящен этот параграф.

Метод малых возмущений хорошо приспособлен к потребностям авиационной и ракетной техники, так как он разработан применительно к условиям обтекания крыльев и фюзеляжей скоростных самолетов и корпусов ракет. Для всех этих тел характерным является то, что у них поперечный размер (толщина) мал по сравнению с продольным (длиной); в дальнейшем такие тела мы будем называть *тонкими телами*. Кроме того, для всех таких тел характерна малая изогнутость. Если тонкое малоизогнутое тело движется в покоящейся среде под малым углом атаки, то скорости, которые возникают от этого дви-