Подставляя отношение a^2/a_∞^2 из (5.76), разлагая в биномиальный ряд и ограничиваясь малыми первого порядка, получим:

$$\frac{p}{p_\infty} = 1 - k\mathrm{M}_\infty^2 \frac{v'_x}{V_\infty};$$

отсюда коэффициент давления получается равным

$$\bar{p} = -2\frac{v'_x}{V_\infty}. \tag{5.77}$$

Аналогично определяется плотность, если вспомнить, что

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} = \left(\frac{a^2}{a_\infty^2}\right)^{1/(k-1)} \approx 1 - \mathrm{M}_\infty^2 \frac{v'_x}{V_\infty}. \tag{5.78}$$

Выведенные в этом параграфе основные формулы теории малых возмущений показывают, что все величины, характеризующие движение идеального газа, могут быть легко вычислены по этой теории, если известна компонента v'_x скорости возмущения, направленная вдоль набегающего потока. Для того чтобы найти эту компоненту и вообще поле скоростей потенциального потока газа, необходимо привести к линейному виду и уравнение для потенциала скоростей.

§ 26. Линеаризация уравнения для потенциала скоростей потока газа

Приведение уравнения для потенциала скоростей потока газа к линейному виду может быть осуществлено двумя способами. Можно исходить из уравнения (5.22) и пренебречь в нем слагаемыми, которые содержат произведения или квадраты компонент возмущения. Можно также исходить из уравнения неразрывности движения для газа, привести это уравнение к виду, линейному относительно компонент скорости, и затем подставить в него выражения этих компонент через потенциал скоростей. Второй способ является менее громоздким, и поэтому мы применим именно этот способ.

Уравнение неразрывности движения для установившегося течения газа имеет вид

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0.$$

Подставим сюда вместо ρ его выражение по линейной теории движения газа (формула (5.78)). Имеем

$$\left.\begin{aligned} \rho v_x &= \rho_\infty\left(1 - \mathrm{M}_\infty^2 \frac{v'_x}{V_\infty}\right)(V_\infty + v'_x), \\ \rho v_y &= \rho_\infty\left(1 - \mathrm{M}_\infty^2 \frac{v'_x}{V_\infty}\right) v'_y, \\ \rho v_z &= \rho_\infty\left(1 - \mathrm{M}_\infty^2 \frac{v'_x}{V_\infty}\right) v'_z. \end{aligned}\right\} \tag{5.79}$$

Раскрывая скобки и отбрасывая слагаемые с квадратами и произведениями компонент возмущения, получим:

$$\rho v_x = \rho_\infty (V - \mathrm{M}_\infty^2 v'_x + v'_x) = \rho_\infty [V_\infty + (1 - \mathrm{M}_\infty^2) v'_x],$$

$$\rho v_y = \rho_\infty v'_y, \quad \rho v_z = \rho_\infty v'_z.$$

Так как производная от первого слагаемого в выражении для ρv_x равна нулю, то уравнение неразрывности движения примет вид

$$(1 - \mathrm{M}_\infty^2)\frac{\partial v'_x}{\partial x} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} + \frac{\partial v'_z}{\partial z} = 0, \tag{5.80}$$

или, что все равно:

$$(1 - \mathrm{M}_\infty^2)\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \tag{5.81}$$

Если поток потенциален и φ есть потенциал скоростей, то

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Подставляя эти выражения для компонент скорости в уравнение (5.81), получим:

$$(1 - \mathrm{M}_\infty^2)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{5.82}$$

Это уравнение, в отличие от уравнения (5.22), является *линейным дифференциальным уравнением* с постоянными коэффициентами. Для его решения можно применить, например, метод наложения потоков.

Если поток является дозвуковым, т. е. $1 - \mathrm{M}_\infty^2 > 0$, то уравнение (5.82) простой заменой независимых переменных приводится к уравнению Лапласа. В самом деле, вводя вместо x, y, z переменные x_1, y_1, z_1, по формулам

$$x_1 = x, \quad y_1 = y\sqrt{1 - \mathrm{M}_\infty^2}, \quad z_1 = z\sqrt{1 - \mathrm{M}_\infty^2},$$

получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dy} = \sqrt{1 - \mathrm{M}_\infty^2}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \sqrt{1 - \mathrm{M}_\infty^2}\,\frac{\partial \varphi}{\partial z_1};$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy_1}{dy} = (1 - \mathrm{M}_\infty^2)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = (1 - \mathrm{M}_\infty^2)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2}.$$

Если подставить эти выражения в уравнение (5.82) и сократить на $1 - \mathrm{M}_\infty^2$, то уравнение (5.82) перейдет в уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2} = 0.$$

Таким образом, в случае дозвукового потока уравнение (5.82) является уравнением *эллиптического типа*[1]). В случае сверхзвукового потока $1 - M_\infty^2 < 0$ уравнение (5.82) может быть переписано в виде

$$(M_\infty^2 - 1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{5.83}$$

и представляет собой уравнение *гиперболического типа*. Можно доказать, что никакой вещественной заменой независимых переменных это уравнение не может быть приведено к уравнению Лапласа. Для того чтобы привести это уравнение к простейшему виду, введем новые независимые переменные x_1, y_1, z_1 по формулам

$$x_1 = x, \quad y_1 = y\sqrt{M_\infty^2 - 1}, \quad z_1 = z\sqrt{M_\infty^2 - 1}.$$

Выполняя вычисления, аналогичные тем, которые были проделаны ранее для случая дозвукового потока, получим:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_1^2} = 0. \tag{5.84}$$

Как увидим в дальнейшем, это уравнение для потенциала скоростей линеаризованного сверхзвукового потока является более простым, чем уравнение Лапласа, и для плоского течения может быть решено в общем виде.

§ 27. Дозвуковое движение газа при малых возмущениях. Пересчет скорости и давления от несжимаемой среды на сжимаемую

В предыдущем параграфе было показано, что линеаризованное уравнение для потенциала скоростей потока газа

$$(1 - M_\infty^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0,$$

в случае дозвукового движения переводится с помощью замены переменных

$$x_1 = x, \quad y_1 = y\sqrt{1 - M_\infty^2}, \quad z_1 = z\sqrt{1 - M_\infty^2}$$

в уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_1^2} = 0.$$

С точки зрения аэродинамики это означает, что всякому линеаризованному дозвуковому потоку газа в пространстве x, y, z соответствует поток несжимаемой жидкости в пространстве x_1, y_1, z_1, имеющий тот же, что и для газа, потенциал скоростей. Найдем соотношение между скоростями в этих потоках и между размерами обтекаемых тел.

[1]) Классификацию дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка читатель может найти, например, в книге: Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. IV, ГТТИ, 1951.