

является уравнением *эллиптического типа*<sup>1)</sup>. В случае сверхзвукового потока  $1 - M_\infty^2 < 0$  уравнение (5.82) может быть переписано в виде

$$(M_\infty^2 - 1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (5.83)$$

и представляет собой уравнение *гиперболического типа*. Можно доказать, что никакой вещественной заменой независимых переменных это уравнение не может быть приведено к уравнению Лапласа. Для того чтобы привести это уравнение к простейшему виду, введем новые независимые переменные  $x_1, y_1, z_1$  по формулам

$$x_1 = x, \quad y_1 = y \sqrt{M_\infty^2 - 1}, \quad z_1 = z \sqrt{M_\infty^2 - 1}.$$

Выполняя вычисления, аналогичные тем, которые были проделаны ранее для случая дозвукового потока, получим:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2} = 0. \quad (5.84)$$

Как увидим в дальнейшем, это уравнение для потенциала скоростей линеаризованного сверхзвукового потока является более простым, чем уравнение Лапласа, и для плоского течения может быть решено в общем виде.

### § 27. Дозвуковое движение газа при малых возмущениях. Пересчет скорости и давления от несжимаемой среды на сжимаемую

В предыдущем параграфе было показано, что линеаризованное уравнение для потенциала скоростей потока газа

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

в случае дозвукового движения переводится с помощью замены переменных

$$x_1 = x, \quad y_1 = y \sqrt{1 - M_\infty^2}, \quad z_1 = z \sqrt{1 - M_\infty^2}$$

в уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2} = 0.$$

С точки зрения аэродинамики это означает, что всякому линеаризованному дозвуковому потоку газа в пространстве  $x, y, z$  соответствует поток несжимаемой жидкости в пространстве  $x_1, y_1, z_1$ , имеющий тот же, что и для газа, потенциал скоростей. Найдем соотношение между скоростями в этих потоках и между размерами обтекаемых тел.

<sup>1)</sup> Классификацию дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка читатель может найти, например, в книге: Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. IV, ГТТИ, 1951.

Так как

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}},$$

то

$$v_{x1} = v_x, \quad v_{y1} = \frac{v_y}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}, \quad v_{z1} = \frac{v_z}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}. \quad (5.85)$$

Таким образом, при переходе от потока газа к соответствующему потоку несжимаемой жидкости продольные скорости (т. е. направленные вдоль набегающего потока) сохраняются, а поперечные скорости увеличиваются по абсолютной величине в отношении  $\frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$ .

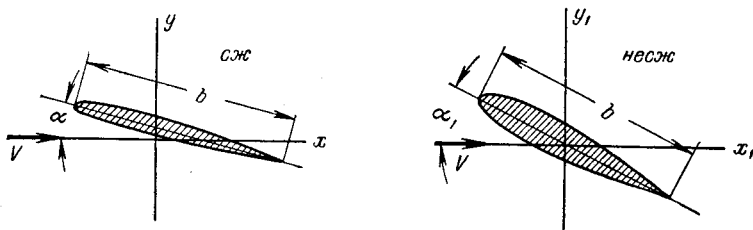


Рис. 5.69. При одинаковом потенциале скоростей угол атаки тонкого тела будет в потоке несжимаемой жидкости в  $\frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$  раз больше, чем в потоке газа.

Отсюда следует, что тангенсы углов наклона к оси  $x$  проекций линий тока на координатные плоскости, соответственно равные  $v_y/v_x$  и  $v_z/v_x$ , также будут в потоке несжимаемой жидкости в  $\frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$  раз больше, нежели в соответствующем потоке газа (ввиду малости этих углов тангенсы можно заменить самими углами). Вследствие этого и угол атаки в потоке несжимаемой жидкости будет в  $\frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$  раз больше, чем в соответствующем потоке газа (рис. 5.69):

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}.$$

Увеличение  $v_y/v_x$  на поверхности тела в несжимаемой среде по сравнению с газом приводит к тому, что толщина тела  $c_1$  в несжимаемой среде будет в  $\frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$  раз больше, чем у соответствующего тела в газе (рис. 5.70). Увеличение  $v_z/v_x$  на поверхности тела в несжимаемой

среде по сравнению с газом приводит к тому, что размах тела  $l_1$  в несжимаемой среде будет в  $\frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}}$  раз больше, чем у соответствующего тела в газе:

$$c_1 = \frac{c}{\sqrt{1-M_\infty^2}}, \quad l_1 = \frac{l}{\sqrt{1-M_\infty^2}}.$$

Итак, каждому линейризованному потоку газа, обтекающему тонкое тело, соответствует поток несжимаемой жидкости, имеющий тот же

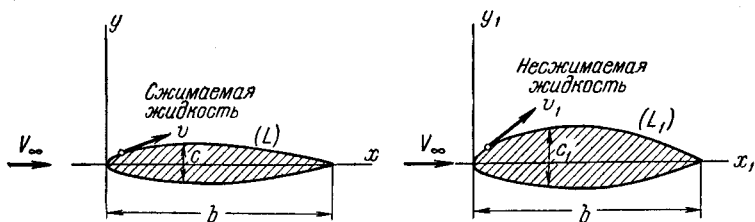


Рис. 5.70. При одинаковом потенциале скоростей углы наклона линий тока к оси  $x$ , а следовательно, и толщина тела будут в потоке несжимаемой жидкости в

$$\frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}} \text{ раз больше, чем в потоке газа.}$$

потенциал скоростей, что и поток газа, но обтекающий тело соответственно большей толщины и размаха и под большим углом атаки, чем в газе (рис. 5.71). Отсюда следует, что при дозвуковых скоростях в газе увеличение  $M_\infty$  влияет на распределение скоростей и

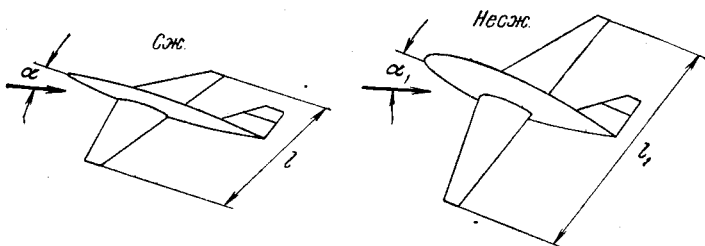


Рис. 5.71. Соответствующие друг другу тела в линейризованном потоке газа и потоке несжимаемой жидкости (при одинаковом потенциале скорости в обоих потоках).

давлений по поверхности тела так же, как увеличение толщины или размаха, или угла атаки при обтекании тела несжимаемой жидкостью. На рис. 5.72 изображены кривые распределения давления вдоль хорды тонкого тела при нарастании  $M_\infty < M_{кр}$ , которые выглядят так же, как кривые распределения давления в несжимаемой среде при нарастании толщины.

Для расчетов более удобно сопоставлять распределения скоростей и давлений не для разных по толщине тел и не для разных углов атаки, а для одного и того же тела, но при разных значениях  $M$ . С этой целью рассмотрим наряду с потоком несжимаемой жидкости, у которого потенциал скоростей равен  $\varphi$ , а потенциал скоростей потока возмущения равен  $\varphi'$ , другой поток несжимаемой жидкости, у которого потенциал скоростей потока возмущения равен  $\varphi'_2$ , причем:

$$\varphi'_2 = \varphi' \sqrt{1 - M_\infty^2}.$$

Очевидно, что если  $\varphi'$  удовлетворяет уравнению Лапласа, то и  $\varphi'_2$  также удовлетворяет этому уравнению,

т. е. поток с потенциалом скоростей  $\varphi_2$  также является потоком несжимаемой жидкости. Однако тело, которое обтекается этим потоком, отличается от тела, находящегося в потоке с потенциалом скоростей  $\varphi$ . В самом деле, компоненты скорости возмущения потока с потенциалом скоростей  $\varphi_2$  равны

$$v'_{x2} = v'_{x1} \sqrt{1 - M_\infty^2}, \quad v'_{y2} = v'_{y1} \sqrt{1 - M_\infty^2}, \quad v'_{z2} = v'_{z1} \sqrt{1 - M_\infty^2}.$$

Подставляя сюда вместо  $v'_{x1}$ ,  $v'_{y1}$ ,  $v'_{z1}$  их выражения по формулам (5.85), получим:

$$v'_{x2} = v'_x \sqrt{1 - M_\infty^2}, \quad v'_{y2} = v'_y, \quad v'_{z2} = v'_z. \quad (5.86)$$

Таким образом, в потоке несжимаемой жидкости с потенциалом скоростей  $\varphi_2$  компоненты скорости возмущения, перпендикулярные к набегающему потоку, имеют такие же величины, как одноименные компоненты скорости возмущения в исходном потоке газа. Поэтому угол атаки, толщина и размах обтекаемого тела будут в потоке с потенциалом скоростей  $\varphi_2$  такими же, как в исходном потоке газа. Длина тела в потоке с потенциалом скоростей  $\varphi_2$  также будет равна длине тела в потоке газа, ибо, как следует из дифференциального уравнения линий тока:

$$dx = \frac{v_x}{v_y} dy = \frac{V_\infty + v'_x}{v'_y} dy,$$

или с точностью до малых величин второго порядка

$$dx = \frac{V_\infty}{v'_y} dy;$$

но так как  $dy$  и  $v'_y$  одинаковы в обоих рассматриваемых потоках, то будут одинаковы и  $dx$ . Итак, в обоих рассматриваемых потоках

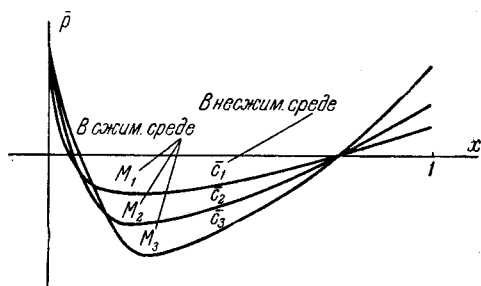


Рис. 5.72. Увеличение числа  $M_\infty$  эквивалентно при дозвуковых скоростях газа увеличению толщины или угла атаки в несжимаемой среде.

(газа и несжимаемой жидкости) мы имеем одно и то же тело, под одним и тем же углом атаки.

Продольные скорости возмущения в этих потоках будут разными. Если обозначить  $v'_x$  через  $v'_{x\text{сж}}$ ,  $v'_{x2}$  через  $v'_{x\text{несж}}$ , то первое из равенств (5.86) сможем переписать в виде

$$v'_{x\text{сж}} = \frac{v'_{x\text{несж}}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}. \quad (5.87)$$

На основании последнего соотношения и формулы линейной теории для коэффициента давления (5.77) получаем:

$$\bar{p}_{\text{сж}} = \frac{\bar{p}_{\text{несж}}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}. \quad (5.88)$$

Эта простая и вместе с тем важная формула служит для пересчета коэффициентов давления  $\bar{p}_{\text{несж}}$ , полученных (расчетным или опытным

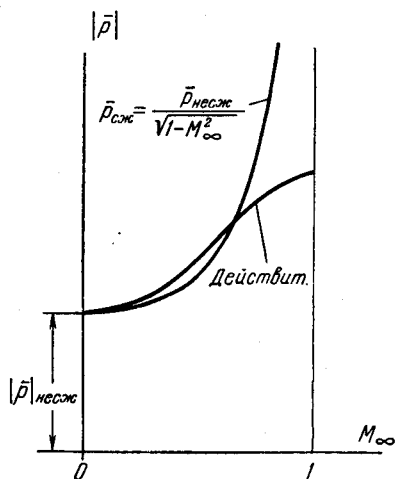


Рис. 5.73. Изменение коэффициента давления в данной точке тонкого тела при изменении числа  $M_\infty$  в дозвуковой области.

путем) для обтекания тела несжимаемой средой на большие, дозвуковые скорости обтекания того же тела газом. Формула (5.88) показывает, что с возрастанием числа  $M_\infty$  в дозвуковом потоке коэффициент давления  $\bar{p}$  по абсолютной величине возрастает (рис. 5.73).

Следует, однако, иметь в виду, что применение формулы (5.88) ограничено как по месту на обтекаемом теле, так и по числам  $M$ . Формулу (5.88) нельзя применять к тем местам на поверхности тела, где вообще неприменима линейная теория. Таким местом является окрестность точки торможения потока, где скорость близка к нулю и где, следовательно, скорость возмущения  $v' = v - V_\infty$  близка к скорости набегающего потока, т. е. не является

малой величиной. Действительно, для точки торможения формула (5.88) дает значения  $\bar{p}_{\text{сж}}$  иные, нежели точная формула (гл. II, § 13). По точной формуле получается:

$$\bar{p}_{0\text{сж}} = 1 + \frac{1}{4} M_\infty^2 + \dots,$$

тогда как, разлагая в ряд по степеням  $M_\infty$  выражение в правой части равенства (5.88) и учитывая, что  $\bar{p}_{0\text{несж}} = 1$ , будем иметь:

$$\bar{p}_{0\text{сж}} = 1 + \frac{1}{2} M_\infty^2 + \dots;$$

это выражение отличается от точного уже во втором слагаемом,

Формулу (5.88), как и вообще линейную теорию для дозвуковых скоростей, нельзя применять также при  $M_\infty > M_{кр}$ . По этой формуле получается, что при увеличении  $M_\infty$  до единицы величина  $\bar{p}_{сж}$  стремится к бесконечности. В действительности  $\bar{p}$  при этом стремится к определенному, конечному пределу. Более точная теория, позволяющая вычислять коэффициенты давления в значительно большем промежутке чисел  $M_\infty$ , будет изложена в дальнейшем.

## § 28. Сверхзвуковое движение газа при малых возмущениях. Понятие о характеристиках сверхзвукового движения

В случае сверхзвукового потока линеаризованное уравнение для потенциала скоростей имеет, как известно из предыдущего (§ 26), следующий вид:

$$(M_\infty^2 - 1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Заменой переменных

$$x_1 = x, \quad y_1 = y \sqrt{M_\infty^2 - 1}, \quad z_1 = z \sqrt{M_\infty^2 - 1}$$

это уравнение приводится к наиболее простой форме (5.84):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2} = 0.$$

Можно сразу же указать бесчисленное множество решений последнего уравнения.

Заметим с этой целью, что если в уравнении Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

сделать замену переменных, положив

$$x_1 = x, \quad y_1 = iy, \quad z_1 = iz,$$

где  $l = \sqrt{-1}$ , то получим:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2},$$

и уравнение Лапласа перейдет в уравнение (5.84). Поэтому всякое решение уравнения Лапласа после такой же замены переменных переходит в решение уравнения (5.84). Разумеется, однако, что это решение может быть использовано лишь в том случае, когда в результате такой замены переменных потенциал скоростей остается вещественной функцией.

Возможен и другой путь получения частных решений уравнения (5.84). Нетрудно проверить, что переменная

$$\xi = x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} (y_1 + z_1)$$