Формулу (5.88), как и вообще линейную теорию для дозвуковых скоростей, нельзя применять также при $M_\infty > M_{кр}$. По этой формуле получается, что при увеличении M_∞ до единицы величина $\bar{p}_{сж}$ стремится к бесконечности. В действительности $\bar{p}$ при этом стремится к определенному, конечному пределу. Более точная теория, позволяющая вычислять коэффициенты давления в значительно большем промежутке чисел M_∞, будет изложена в дальнейшем.

§ 28. Сверхзвуковое движение газа при малых возмущениях. Понятие о характеристиках сверхзвукового движения

В случае сверхзвукового потока линеаризованное уравнение для потенциала скоростей имеет, как известно из предыдущего (§ 26), следующий вид:

$$(M_\infty^2 - 1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Заменой переменных

$$x_1 = x, \quad y_1 = y\sqrt{M_\infty^2 - 1}, \quad z_1 = z\sqrt{M_\infty^2 - 1}$$

это уравнение приводится к наиболее простой форме (5.84):

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_1^2} = 0.$$

Можно сразу же указать бесчисленное множество решений последнего уравнения.

Заметим с этой целью, что если в уравнении Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

сделать замену переменных, положив

$$x_1 = x, \quad y_1 = iy, \quad z_1 = iz,$$

где $i = \sqrt{-1}$, то получим:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_1^2},$$

и уравнение Лапласа перейдет в уравнение (5.84). Поэтому всякое решение уравнения Лапласа после такой же замены переменных переходит в решение уравнения (5.84). Разумеется, однако, что это решение может быть использовано лишь в том случае, когда в результате такой замены переменных потенциал скоростей остается вещественной функцией.

Возможен и другой путь получения частных решений уравнения (5.84). Нетрудно проверить, что переменная

$$\xi = x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + z_1)$$

является решением уравнения (5.84). Наряду с этим переменные

$$\eta = x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + z_1), \quad \zeta = x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 - z_1)$$

также являются решениями уравнения (5.84). Если перейти в уравнении (5.84) к новым независимым переменным ξ, η, ζ, то будем иметь:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2} + 2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\,\partial\eta} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\,\partial\zeta} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta\,\partial\zeta}\right),$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right) - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\,\partial\eta} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\,\partial\zeta} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta\,\partial\zeta},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_1^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right) - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\,\partial\eta} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\,\partial\zeta} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta\,\partial\zeta},$$

и уравнение (5.84) примет вид

$$2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\,\partial\eta} + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right) = 0.$$

Последнее уравнение показывает, что не только ξ, но и любая функция от ξ, которую мы обозначим через $g(\xi)$, является его решением, а значит, и решением исходного уравнения (5.84). Точно так же этому уравнению удовлетворяют произвольная функция от η и произвольная функция от ζ, которые мы обозначим соответственно через $f(\eta)$ и $e(\zeta)$. Так как уравнение линейно, то и сумма этих функций также является его решением. Таким образом, мы приходим к широкому классу решений уравнения для потенциала скоростей сверхзвукового потока, имеющих вид

$$\varphi = g(\xi) + f(\eta) + e(\zeta).$$

В частном случае *плоского* сверхзвукового движения газа можно получить путем аналогичных рассуждений *общий интеграл* уравнения для потенциала скоростей. Пусть газ движется параллельно плоскости x_1y_1; тогда уравнение (5.84) будет иметь вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} = 0. \tag{5.89}$$

Введем новые независимые переменные ξ_1 и η_1, которые определяются формулами

$$\xi_1 = x_1 + y_1, \quad \eta_1 = x_1 - y_1;$$

тогда

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_1^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_1\partial\eta_1} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta_1^2},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_1^2} - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_1\,\partial\eta_1} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta_1^2},$$

и уравнение (5.89) запишется в виде

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} = 4\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_1\partial\eta_1} = 0.$$

Но равенство

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} = 0$$

означает, что $\partial\varphi/\partial\eta_1$ не зависит от ξ, а является функцией только η_1:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta_1} = f_1(\eta_1).$$

Отсюда следует, что искомая функция φ равна

$$\varphi = f(\eta_1) + g(\xi_1). \tag{5.90}$$

«Постоянная интегрирования» g может здесь зависеть от ξ_1, так как в предыдущее равенство входила лишь *частная* производная от φ по η_1.

Формула (5.90) дает общее решение уравнения (5.89); f и g в этой формуле являются произвольными функциями соответственно от η_1 и ξ_1. Вид этих функций в каждой конкретной задаче определяется ее граничными условиями; в дальнейшем это будет продемонстрировано на примерах.

Если вернуться от переменных ξ_1 и η_1 к исходным независимым переменным x, y, то, принимая во внимание, что

$$\xi_1 = x + y\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}, \qquad \eta_1 = x - y\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1},$$

сможем записать общий интеграл уравнения (5.89) в виде

$$\varphi = f\left(x - y\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}\right) + g\left(x + y\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}\right).$$

Теперь можно вычислить составляющие скорости в каждой точке потока:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = f' + g', \qquad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (g' - f')\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}; \tag{5.91}$$

здесь $'$ означает дифференцирование: для f по η_1, для g — по ξ_1. Из последних формул видно, что

$$v_x + \frac{v_y}{\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}} = 2g', \qquad v_x - \frac{v_y}{\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}} = 2f'. \tag{5.92}$$

Определим линии, вдоль которых f или g сохраняют постоянные значения; эти линии являются линиями равного потенциала в тех случаях, когда φ определяется только одной из функций f и g, т. е. когда по граничным условиям задачи вторую функцию можно положить равной нулю. Функция f будет сохранять постоянное значение, если

$$x - y\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1} = \mathrm{const};$$

функция g будет сохранять постоянное значение, если

$$x + y\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1} = \mathrm{const}.$$

Первое из этих уравнений представляет собой семейство параллельных друг другу прямых

$$y = \frac{x}{\sqrt{\mathsf{M}_\infty^2 - 1}} + C_1,$$

угловой коэффициент которых равен $\frac{1}{\sqrt{\mathsf{M}_\infty^2 - 1}}$; второе уравнение, которое можно записать в виде

$$y = -\frac{x}{\sqrt{\mathsf{M}_\infty^2 - 1}} + C_2,$$

представляет собой семейство параллельных друг другу прямых с угловым коэффициентом, равным $-\frac{1}{\sqrt{\mathsf{M}_\infty^2 - 1}}$. Каждая из линий как первого, так и второго семейства называется *характеристической линией* или, коротко, *характеристикой уравнения* (5.89) (рис. 5.74).

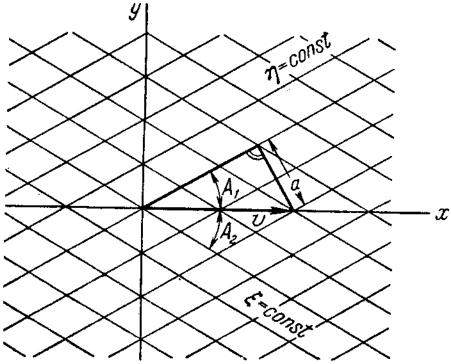

Рис. 5.74. Характеристики в плоском сверхзвуковом потоке (при малых возмущениях). Проекция скорости v на перпендикуляр к характеристике равна скорости распространения звука a_∞.

Найдем угол наклона A характеристических линий к оси x; из равенства

$$\operatorname{tg} A_1 = \frac{1}{\sqrt{\mathsf{M}_\infty^2 - 1}}$$

для линий первого семейства следует, что

$$\sin A_1 = \frac{1}{\mathsf{M}_\infty};$$

аналогично для второго семейства

$$\operatorname{tg} A_2 = -\frac{1}{\sqrt{\mathsf{M}_\infty^2 - 1}}$$

и, следовательно,

$$\sin A_2 = -\frac{1}{\mathsf{M}_\infty}.$$

Отсюда видно, что угол A представляет собой угол, характеризующий возмущенную область, о котором шла речь в § 12, а *характеристики являются линиями, вдоль которых распространяются малые возмущения в сверхзвуковом потоке.*

Последние равенства позволяют обнаружить следующее свойство характеристик. Так как $\mathsf{M}_\infty = V_\infty/a_\infty$, то, имея в виду лишь абсолютные значения величин A_1 и A_2, входящих в последние равенства, сможем записать эти равенства в следующем виде:

$$a_\infty = V_\infty \sin A.$$

Таким образом, в прямоугольнике треугольнике, гипотенузой которого является скорость V_∞, а один из катетов направлен вдоль характеристики, другой катет равен a_∞. Можно доказать (см. § 37), что вообще в сверхзвуковом потоке *проекция скорости на перпендикуляр к характеристике равна скорости распространения звука.*

Характеристики обладают еще одним свойством: так как при $\xi_1 = \text{const}$ $g'(\xi) = \text{const}$, а при $\eta_1 = \text{const}$ $f'(\eta_1) = \text{const}$, то из уравнений (5.92) следует, что на характеристиках первого семейства имеет место соотношение

$$v_x + v_y \operatorname{tg} A_2 = \text{const},$$

а на характеристиках второго семейства — соотношение

$$v_x + v_y \operatorname{tg} A_1 = \text{const}.$$

Иначе это можно записать так: на линиях первого семейства

$$v_x \cos A_2 + v_y \sin A_2 = \text{const},$$

на линиях второго семейства

$$v_x \cos A_1 + v_y \sin A_1 = \text{const}.$$

Это означает, что во всех точках каждой характеристики первого семейства проекция скорости на направление характеристик второго семейства есть величина постоянная. Точно так же во всех точках каждой характеристики второго семейства проекция скорости на направление характеристики первого семейства есть величина постоянная. Вообще скорость направлена по биссектрисе угла между характеристиками.

Перейдем теперь к примерам сверхзвуковых линеаризованных потоков газа (линеаризованными мы называем их потому, что их потенциалы скоростей удовлетворяют линеаризованному уравнению (5.89)).

Пример 1. **Поступательный поток.** Возьмем $f(\eta_1) = \frac{1}{2} V\eta_1$, $g(\xi_1) = \frac{1}{2} V\xi_1$; тогда получим: $\varphi = Vx$, $v_x = V$, $v_y = 0$. Таким образом, при этих значениях f и g получается потенциал скоростей поступательного потока, текущего вдоль оси x со скоростью V.

Пример 2. **Линеаризованный источник (или сток) на плоскости.** Возьмем

$$f(\eta_1) = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{\eta_1}, \quad g(\xi_1) = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{\xi_1};$$

тогда

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{\xi_1 \eta_1} = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 - y^2 (\mathrm{M}_\infty^2 - 1)}.$$

Назовем этот поток плоским линеаризованным сверхзвуковым источником (при $Q > 0$) или стоком (при $Q < 0$). Формула для его потенциала скоростей (при $\mathrm{M}_\infty^2 - 1 = 1$), очевидно, получается из формулы для потенциала скоростей источника или стока в несжимаемой среде, если заменить в ней y на iy. Однако, в отличие от источника или стока в несжимаемой среде, потенциал скоростей линеаризованного сверхзвукового источника представляет собою вещественную функцию не на всей плоскости течения, а лишь при $x^2 - y^2(\mathrm{M}_\infty^2 - 1) > 0$, т. е. внутри угла, образованного прямыми линиями $y = \frac{x}{\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}}$ и $y = -\frac{x}{\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}}$. Вне этого угла потенциал скоростей есть мнимая величина, и потока там не существует.

Вычислим поле скоростей и линии тока линеаризованного источника. Составляющие скорости определяются равенствами

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{Q}{2\pi}\frac{x}{x^2 - y^2(\mathrm{M}_\infty^2 - 1)},$$

$$v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{Q}{2\pi}\frac{y(\mathrm{M}_\infty^2 - 1)}{x^2 - y^2(\mathrm{M}_\infty^2 - 1)}.$$

Отсюда видно, что на двух прямых линиях

$$y = \frac{x}{\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}} \quad \text{и} \quad y = -\frac{x}{\sqrt{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}}$$

составляющие скорости обращаются в бесконечность и, следовательно, эти линии состоят сплошь из особых точек.

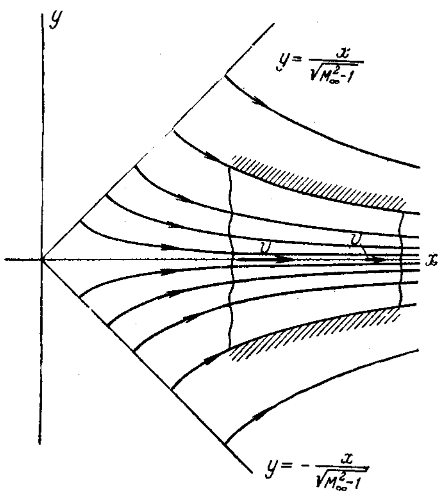

Рис. 5.75. Плоский линеаризованный сверхзвуковой источник (при $\mathrm{M}_\infty = \sqrt{2}$). Движение газа между линиями тока, отмеченными штриховкой, дает картину входа сверхзвукового потока в сужающийся плоский насадок (или, в случае стока, в расширяющийся насадок).

Дифференциальное уравнение линий тока имеет в данном случае следующий вид:

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y(\mathrm{M}_\infty^2 - 1)};$$

интегрируя его, находим:

$$\ln x = -\frac{1}{\mathrm{M}_\infty^2 - 1}\ln y - \ln C.$$

Отсюда

$$y = Cx^{-(\mathrm{M}_\infty^2 - 1)}.$$

Если взять для численного примера $\mathrm{M}_\infty = \sqrt{2} = 1{,}41$, то уравнение линий тока будет:

$$y = \frac{C}{x};$$

это — семейство равнобочных гипербол, для которых оси координат служат асимптотами (рис. 5.75).

Разумеется, не весь рассматриваемый поток удовлетворяет условию, чтобы скорость мало изменялась при переходе от одной точки к другой; в частности, этому условию не удовлетворяют области, расположенные вблизи особых линий, так как из этих линий газ вытекает с бесконечно большой скоростью. Но если взять, например, область, ограниченную двумя волнистыми линиями, проведенными на рис. 5.75, и двумя линиями тока, отмеченными штриховкой, то движение в этой области будет удовлетворять условию малых возмущений, и мы получим здесь картину сверхзвукового движения газа между двумя направляющими поверхностями, очерченными в данном частном случае ($\mathrm{M}_\infty = \sqrt{2}$) по равнобочным гиперболам.

Пример 3. **Линеаризованный источник (или сток) в пространстве.** Рассмотрим сверхзвуковой поток, потенциал скоростей которого получается из потенциала скоростей пространственного источника в несжимаемой среде заменой вещественных координат y и z на мнимые величины по формулам $y_1 = iy$, $z_1 = iz$; этот поток мы будем называть линеаризованным источником (или стоком) в пространстве. Из кинематики жидкости известно, что потенциал скоростей пространственного источника в несжимаемой среде, центр которого находится в начале координат, равен

$$\varphi_{\text{несж}} = -\frac{Q}{4\pi\rho} = -\frac{Q}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

После упомянутой замены переменных мы получим из этого выражения потенциал скоростей пространственного линеаризованного источника в сверхзвуковом потоке:

$$\varphi = \frac{C}{\sqrt{x_1^2 - y_1^2 - z_1^2}},$$

где $C = \text{const}$.

Величина φ является вещественной лишь в том случае, когда $x_1^2 \geqslant y_1^2 + z_1^2$; поэтому область рассматриваемого потока ограничена конусом с вершиной в начале координат, ось которого направлена вдоль оси x, и с углом между образующей и осью, равным 45°. Поле скоростей этого потока определяется формулами

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \frac{-Cx_1}{(x_1^2 - y_1^2 - z_1^2)^{3/2}}, \quad v_y = \frac{Cy_1}{(x_1^2 - y_1^2 - z_1^2)^{3/2}},$$

$$v_z = \frac{Cz_1}{(x_1^2 - y_1^2 - z_1^2)^{3/2}}.$$

Отсюда видно, что поверхность конуса $x_1^2 = y_1^2 + z_1^2$ состоит из особых точек, в которых скорость обращается в бесконечность. Дифференциальные уравнения линий тока имеют в данном случае вид

$$\frac{dx_1}{x_1} = -\frac{dy_1}{y_1} = -\frac{dz_1}{z_1}.$$

Интегрируя эти уравнения, находим:

$$y_1 = \frac{C_1}{x_1}, \quad z_1 = \frac{C_2}{x_1},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Таким образом, линии тока представляют собой линии пересечения двух гиперболических цилиндров с взаимно перпендикулярными образующими, т. е. так же, как и в предыдущем примере, являются гиперболами.

Аналогично могут быть рассмотрены линеаризованные сверхзвуковые диполи на плоскости и в пространстве; их потенциалы скоростей получаются путем перехода к мнимым переменным из потенциалов скоростей одноименных потоков в несжимаемой жидкости. Зная потенциалы скоростей простейших линеаризованных сверхзвуковых потоков, можно затем методом наложения потоков получать потенциалы скоростей более сложных потоков, удовлетворяющих заданным граничным условиям.