расстоянии от носка, равном половине хорды, в то время как при дозвуковом обтекании линия действия подъемной силы проходит на расстоянии от носка приблизительно в четверть хорды.

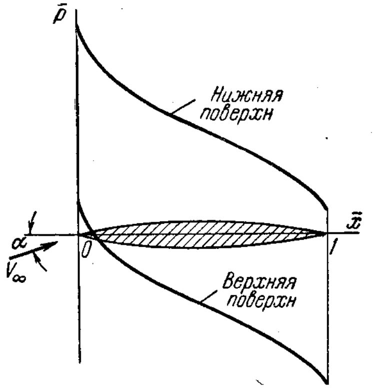

Рис. 5.86. Распределение давления вдоль контура тонкого симметричного профиля, обтекаемого под малым углом атаки линеаризованным сверхзвуковым потоком. В точках касания прямых, параллельных V_∞, $\bar{p}=0$.

Распределение давлений по контуру тонкого симметричного профиля при обтекании под углом атаки получается, как уже указывалось, сложением давлений, изображенных на рис. 5.82 и 5.85; оно представлено на рис. 5.86.

Может оказаться при обтекании профиля под углом атаки, что некоторые скачки уплотнения исчезнут. Это будет, например, в том случае, когда угол атаки больше угла $\vartheta_{1н}$ между хордой профиля и касательной к контуру в носовой точке. В этом случае угол у носка профиля, образованный линией тока набегающего потока и верхней частью контура, будет выпуклым, и при его обтекании произойдет плавное постепенное ускорение потока

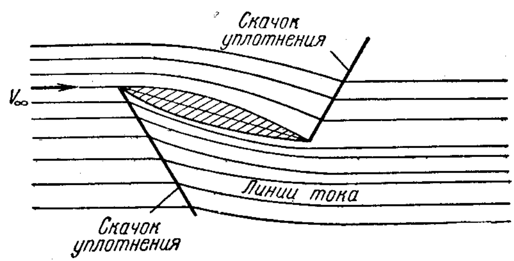

Рис. 5.87. Обтекание тонкого профиля под малым углом атаки линеаризованным сверхзвуковым потоком; случай, когда $\alpha > \vartheta_{1н}$ и $\alpha > \vartheta_{1хв}$.

и разрежение среды. Аналогичное обстоятельство будет иметь место и у хвостика профиля при $\alpha > \vartheta_{1хв}$ (рис. 5.87).

§ 31. Преобразование уравнений для потенциала скоростей и функции тока в линейные дифференциальные уравнения по способу Лежандра

Нелинейность уравнения (5.22) для потенциала скоростей является основной математической трудностью в теории потенциального движения газа. Большое значение имеют поэтому способы преобразования этого уравнения в линейное дифференциальное уравнение. Следует с самого начала подчеркнуть, что речь идет здесь не о замене уравнения (5.22) приближенным линейным уравнением, а о *точном* преобразовании уравнения (5.22) в линейное дифференциальное уравнение.

Мы рассмотрим случай плоского течения газа и, наряду с преобразованием уравнения (5.24) для потенциала скоростей, преобразуем к линейному виду и уравнение (5.26) для функции тока.

Из теории дифференциальных уравнений в частных производных известно преобразование Лежандра, которое применительно к данному случаю заключается в том, что вместо x и y за независимые переменные принимаются составляющие скорости v_x и v_y, а за искомую функцию вместо потенциала скоростей φ так называемый сопряженный потенциал

$$\Phi = xv_x + yv_y - \varphi. \tag{5.102}$$

При этом оказывается, как увидим далее, что для $\Phi(v_x, v_y)$ получается линейное дифференциальное уравнение. Найдя в результате решения этого уравнения сопряженный потенциал, легко затем установить зависимость между составляющими скорости v_x и v_y и координатами точки x и y. В самом деле, дифференцируя формулу Φ по v_x, получаем:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v_x} = x + \frac{\partial x}{\partial v_x}v_x + \frac{\partial y}{\partial v_x}v_y - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v_x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v_x} =$$
$$= x + \frac{\partial x}{\partial v_x}v_x + \frac{\partial y}{\partial v_x}v_y - v_x\frac{\partial x}{\partial v_x} - v_y\frac{\partial y}{\partial v_x}.$$

В правой части все слагаемые, кроме первого, взаимно сокращаются и, следовательно, для $\partial\Phi/\partial v_x$ и аналогично для $\partial\Phi/\partial v_y$ получаются соотношения

$$x = \frac{\partial\Phi}{\partial v_x}, \qquad y = \frac{\partial\Phi}{\partial v_y}. \tag{5.103}$$

Плоскость v_x, v_y называется, как известно из предыдущего (§ 20), плоскостью годографа скорости. Таким образом, преобразование Лежандра осуществляет переход от плоскости течения xy к плоскости годографа скорости v_xv_y и от потенциала скоростей φ к сопряженному потенциалу Φ.

Преобразование Лежандра позволяет не только вычислить сопряженный потенциал по обычному, но и наоборот — по сопряженному потенциалу Φ определить обычный потенциал φ, т. е. позволяет вернуться с плоскости годографа скорости на плоскость течения. Действительно, из формулы (5.102) следует:

$$\varphi = xv_x + yv_y - \Phi;$$

заменяя здесь x и y их выражениями через Φ, получаем для φ формулу, аналогичную формуле, определяющей сопряженный потенциал:

$$\varphi = v_x\frac{\partial\Phi}{\partial v_x} + v_y\frac{\partial\Phi}{\partial v_y} - \Phi.$$

Перейдем теперь к выводу уравнения для сопряженного потенциала. Для того чтобы вычислить производные от φ по координатам, продифференцируем каждое из равенств (5.103) по x и y:

$$1 = \frac{\partial^2\Phi}{\partial v_x^2}\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v_x\partial v_y}\frac{\partial v_y}{\partial x}, \qquad 0 = \frac{\partial^2\Phi}{\partial v_x\partial v_y}\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v_y^2}\frac{\partial v_y}{\partial x},$$
$$0 = \frac{\partial^2\Phi}{\partial v_x^2}\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v_x\partial v_y}\frac{\partial v_y}{\partial y}, \qquad 1 = \frac{\partial^2\Phi}{\partial v_y\partial v_x}\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v_y^2}\frac{\partial v_y}{\partial y}.$$

Вводя вместо производных от v_x и v_y производные от потенциала φ, получим:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial v_x^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial v_x\partial v_y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}=1,$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial v_x^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial v_x\partial v_y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial v_x\partial v_y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial v_y^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial v_x\partial v_y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial v_y^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=1.$$

Решим эту систему уравнений относительно вторых частных производных от φ; в результате будем иметь:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial v_y^2}}{\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial v_x^2}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial v_y^2}-\left(\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial v_x\partial v_y}\right)^2},\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial v_x^2}}{\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial v_x^2}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial v_y^2}-\left(\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial v_x\partial v_y}\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial v_x\partial v_y}}{\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial v_x^2}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial v_y^2}-\left(\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial v_x\partial v_y}\right)^2}.$$

При этом предполагается, что знаменатель полученных выражений не равен нулю; в противном случае преобразование Лежандра неприменимо.

Подставим последние выражения для вторых частных производных от φ в уравнение (5.24) для потенциала скоростей; первые частные производные от φ заменим в этом уравнении составляющими скорости; тогда получим:

$$\left(1-\frac{v_y^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial v_x^2}+\left(1-\frac{v_x^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial v_y^2}+\frac{2v_xv_y}{a^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial v_x\partial v_y}=0, \tag{5.104}$$

где

$$a^2=a_\infty^2+\frac{k-1}{2}(V_\infty^2-v_x^2-v_y^2).$$

Уравнение для сопряженного потенциала Φ при независимых переменных v_x и v_y *является,* как видим, *линейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка.*

Преобразование Лежандра можно применить и к уравнению (5.26) для функции тока. Взяв за независимые переменные

$$q_x=\rho v_x=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad q_y=\rho v_y=-\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

а за искомую функцию

$$\Psi=x\frac{\partial\psi}{\partial x}+y\frac{\partial\psi}{\partial y}-\psi,$$

получим для этой функции вместо нелинейного уравнения (5.26) следующее линейное дифференциальное уравнение:

$$\left(1-\frac{q_x^2}{(\rho a)^2}\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial q_x^2}+\left(1-\frac{q_y^2}{(\rho a)^2}\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial q_y^2}-\frac{2q_xq_y}{(\rho a)^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial q_x\partial q_y}=0. \tag{5.105}$$