## § 32. Уравнения Чаплыгина для потенциала скоростей и функции тока плоского потока газа

Другой способ преобразования уравнений для потенциала скоростей и функции тока плоского потока в линейные уравнения, нежели изложенный в предыдущем параграфе, был впервые широко использован для решения задач газовой динамики С. А. Чаплыгиным. Его работа «О газовых струях» [1]), в которой был применен этот способ, положила начало дальнейшему развитию аэродинамики больших скоростей.

Этот способ преобразования уравнений заключается в том, что вместо независимых переменных $x$ и $y$ вводятся новые независимые переменные: величина вектора скорости $v$ и угол $\vartheta$, который составляет вектор скорости с некоторым заданным направлением, например с осью $x$.

Вместо потенциала скоростей и функции тока, зависящих от $x$ и $y$:

$$\varphi = \varphi(x, y), \qquad \psi = \psi(x, y), \tag{5.106}$$

в этом способе ищут потенциал скоростей и функцию тока, зависящие от $v$ и $\vartheta$:

$$\varphi = \varphi(v, \vartheta), \qquad \psi = \psi(v, \vartheta). \tag{5.107}$$

При составлении уравнений для $\varphi(v, \vartheta)$ и $\psi(v, \vartheta)$ возьмем в качестве промежуточных независимых переменных величины $\varphi$ и $\psi$.

Если зависимости (5.106) взаимно однозначны, то, решая их относительно $x$ и $y$, получим:

$$x = x(\varphi, \psi), \qquad y = y(\varphi, \psi). \tag{5.108}$$

Величины $\varphi$ и $\psi$ здесь следует рассматривать в свою очередь как зависящие от $v$ и $\vartheta$ согласно соотношениям (5.107). Переход от $x$ и $y$ к $v$ и $\vartheta$ мы выполним через посредство $\varphi$ и $\psi$. Продифференцируем каждое из равенств (5.108) по $v$ и $\vartheta$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial v} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial v}, & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} + \frac{\partial x}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta},\\ \frac{\partial y}{\partial v} &= \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} &= \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} + \frac{\partial y}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}. \end{aligned}\right\} \tag{5.109}$$

Для того чтобы найти входящие сюда производные от $x$ и $y$ по $\varphi$ и $\psi$, продифференцируем каждое из равенств (5.108) по $x$ и $y$; тогда получим:

$$1 = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad 0 = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$0 = \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad 1 = \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Но так как

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_x = v\cos\vartheta, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v_y = v\sin\vartheta,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\rho v_y = -\rho v\sin\vartheta, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho v_x = \rho v\cos\vartheta,$$

---

[1]) Чаплыгин С. А., Полное собрание сочинений, т. II, Изд-во Акад. наук СССР, 1933. Работа «О газовых струях», являющаяся докторской диссертацией С. А. Чаплыгина, была впервые опубликована в ученых записках Московского университета в 1902 г.

то эти уравнения принимают вид

$$v\cos\vartheta\frac{\partial x}{\partial\varphi}-\rho v\sin\vartheta\frac{\partial x}{\partial\psi}=1,\qquad v\sin\vartheta\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\rho v\cos\vartheta\frac{\partial x}{\partial\psi}=0,$$

$$v\cos\vartheta\frac{\partial y}{\partial\varphi}-\rho v\sin\vartheta\frac{\partial y}{\partial\psi}=0,\qquad v\sin\vartheta\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\rho v\cos\vartheta\frac{\partial y}{\partial\psi}=1.$$

Решая их, находим:

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}=\frac{\cos\vartheta}{v},\qquad \frac{\partial x}{\partial\psi}=-\frac{1}{\rho}\frac{\sin\vartheta}{v},$$

$$\frac{\partial y}{\partial\varphi}=\frac{\sin\vartheta}{v},\qquad \frac{\partial y}{\partial\psi}=\frac{1}{\rho}\frac{\cos\vartheta}{v}.$$

Подстановка этих выражений в равенства (5.109) дает:

$$\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{1}{v}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cos\vartheta-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial v}\sin\vartheta\right),\qquad \frac{\partial x}{\partial\vartheta}=\frac{1}{v}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\cos\vartheta-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\right),$$

$$\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{v}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\sin\vartheta+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial v}\cos\vartheta\right),\qquad \frac{\partial y}{\partial\vartheta}=\frac{1}{v}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\sin\vartheta+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\cos\vartheta\right).$$

Имея в виду исключить производные от $x$ и $y$ по $v$ и $\vartheta$, вычислим, исходя из первого уравнения, $\frac{\partial^2 x}{\partial\vartheta\,\partial v}$ и приравняем $\frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial\vartheta}$, вычисленной из второго уравнения; точно так же найдем из третьего уравнения $\frac{\partial^2 y}{\partial\vartheta\,\partial v}$ и приравняем $\frac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial\vartheta}$, найденной из четвертого уравнения. В результате получим:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\sin\vartheta+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial v}\cos\vartheta&=\frac{1}{v}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\cos\vartheta-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{dv}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\sin\vartheta,\\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}\cos\vartheta-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial v}\sin\vartheta&=-\frac{1}{v}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\sin\vartheta+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\cos\vartheta\right)-\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{dv}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\cos\vartheta.\end{aligned}\right\}\quad(5.110)$$

Для того чтобы вычислить величину $d\rho/dv$ [1]), входящую в последние два равенства, воспользуемся уравнениями (5.21). Умножив эти уравнения почленно на $dx$, $dy$, $dz$ и сложив, получим

$$d\rho=-\frac{\rho}{a^2}(v_x\,dv_x+v_y\,dv_y+v_z\,dv_z)=-\frac{\rho}{a^2}v\,dv;$$

отсюда

$$\frac{d\rho}{dv}=-\frac{\rho v}{a^2}.$$

Подставим это значение $d\rho/dv$ в равенства (5.110) и решим их относительно $\partial\varphi/\partial\vartheta$ и $\partial\varphi/\partial v$; в результате получатся следующие формулы, связывающие производные от потенциала скоростей с производными от функции тока:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\frac{1}{\rho v}\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta},\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}=\frac{v}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial v}.\qquad(5.111)$$

[1]) Плотность в данной точке зависит только от $v$ и не зависит от $\vartheta$, поэтому производная от $\rho$ по $v$ является обыкновенной, а не частной производной.

Из этих двух уравнений, содержащих две неизвестные функции $\varphi$ и $\psi$, можно путем исключения одной из них получить уравнение, содержащее только одну функцию. Для того чтобы исключить потенциал скоростей, продифференцируем первое уравнение по $\vartheta$, второе — по $v$ и приравняем друг другу правые части. Тогда получится уравнение для функции тока плоского потока газа

$$v^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} + v\left(1 + \frac{v^2}{a^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial v} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial\vartheta^2} = 0. \tag{5.112}$$

Для того чтобы исключить функцию тока, решим уравнения (5.111) относительно $\partial\psi/\partial\vartheta$ и $\partial\psi/\partial v$, продифференцируем затем выражение для $\partial\psi/\partial\vartheta$ по $v$, а выражение для $\partial\psi/\partial v$ — по $\vartheta$ и результаты приравняем друг другу. Тогда получится уравнение для потенциала скоростей плоского потока газа

$$\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) v^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} + v\left(1 + \frac{v^4}{a^4}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta^2} = 0. \tag{5.113}$$

Уравнения (5.111), (5.112) и (5.113) называются *уравнениями Чаплыгина* для плоского потенциального движения газа. В отличие от уравнений (5.24) и (5.26) для потенциала скоростей и функции тока уравнения (5.112) и (5.113) являются *линейными* дифференциальными уравнениями.

В уравнениях Чаплыгина, так же как и в преобразовании Лежандра, осуществлен переход от плоскости течения газа $xy$ к плоскости годографа скорости, но здесь на плоскости годографа скорости взяты не прямоугольные координаты ($v_x$, $v_y$), а полярные — $v$, $\vartheta$.

А. И. Некрасов показал[1]), что удобно и в преобразование Лежандра ввести вместо декартовых полярные координаты $v$, $\vartheta$, т. е. принять $v$ и $\vartheta$ за независимые переменные, а сопряженный потенциал — равным

$$\Phi = x v \cos\vartheta + y v \sin\vartheta - \varphi.$$

Для сопряженного потенциала $\Phi$ при этом получается, как нетрудно проверить путем замены переменных в уравнении (5.104), следующее линейное дифференциальное уравнение:

$$v^2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} + v\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial v} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial\vartheta^2} = 0. \tag{5.114}$$

## § 33. Примеры простейших потенциальных течений газа

Рассмотрим на примерах некоторые простейшие потенциальные движения газа, потенциалы скоростей которых удовлетворяют точным уравнениям двух предыдущих параграфов.

Пример 1. *Плоский вихрь в газе.*

Рассмотрим плоское потенциальное движение газа, для которого сопряженный потенциал скорости зависит в переменных $v$, $\vartheta$ только от одного $\vartheta$:

$$\Phi = \Phi(\vartheta).$$

Из уравнения (5.114) получается, что в этом случае

$$\frac{d^2\Phi}{d\vartheta^2} = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$\Phi = C_1\vartheta + C_2.$$

[1]) Некрасов А. И., О плоскопараллельном движении газа при дозвуковых скоростях, Прикладная математика и механика, т. VIII, вып. 4, 1944.