Из этих двух уравнений, содержащих две неизвестные функции φ и ψ, можно путем исключения одной из них получить уравнение, содержащее только одну функцию. Для того чтобы исключить потенциал скоростей, продифференцируем первое уравнение по ϑ, второе — по v и приравняем друг другу правые части. Тогда получится уравнение для функции тока плоского потока газа

$$v^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} + v\left(1+\frac{v^2}{a^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial v} + \left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial\vartheta^2} = 0. \qquad (5.112)$$

Для того чтобы исключить функцию тока, решим уравнения (5.111) относительно $\partial\psi/\partial\vartheta$ и $\partial\psi/\partial v$, продифференцируем затем выражение для $\partial\psi/\partial\vartheta$ по v, а выражение для $\partial\psi/\partial v$ — по ϑ и результаты приравняем друг другу. Тогда получится уравнение для потенциала скоростей плоского потока газа

$$\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)v^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} + v\left(1+\frac{v^4}{a^4}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta^2} = 0. \qquad (5.113)$$

Уравнения (5.111), (5.112) и (5.113) называются *уравнениями Чаплыгина* для плоского потенциального движения газа. В отличие от уравнений (5.24) и (5.26) для потенциала скоростей и функции тока уравнения (5.112) и (5.113) являются *линейными* дифференциальными уравнениями.

В уравнениях Чаплыгина, так же как и в преобразовании Лежандра, осуществлен переход от плоскости течения газа xy к плоскости годографа скорости, но здесь на плоскости годографа скорости взяты не прямоугольные координаты (v_x, v_y), а полярные — v, ϑ.

А. И. Некрасов показал[1]), что удобно и в преобразование Лежандра ввести вместо декартовых полярные координаты v, ϑ, т. е. принять v и ϑ за независимые переменные, а сопряженный потенциал — равным

$$\Phi = xv\cos\vartheta + yv\sin\vartheta - \varphi.$$

Для сопряженного потенциала Φ при этом получается, как нетрудно проверить путем замены переменных в уравнении (5.104), следующее линейное дифференциальное уравнение:

$$v^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} + v\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial v} + \left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial\vartheta^2} = 0. \qquad (5.114)$$

§ 33. Примеры простейших потенциальных течений газа

Рассмотрим на примерах некоторые простейшие потенциальные движения газа, потенциалы скоростей которых удовлетворяют точным уравнениям двух предыдущих параграфов.

Пример 1. *Плоский вихрь в газе.*

Рассмотрим плоское потенциальное движение газа, для которого сопряженный потенциал скорости зависит в переменных v, ϑ только от одного ϑ:

$$\Phi = \Phi(\vartheta).$$

Из уравнения (5.114) получается, что в этом случае

$$\frac{d^2\Phi}{d\vartheta^2} = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$\Phi = C_1\vartheta + C_2.$$

[1]) Некрасов А. И., О плоскопараллельном движении газа при дозвуковых скоростях, Прикладная математика и механика, т. VIII, вып. 4, 1944.

Потенциал скоростей φ можно теперь определить из соотношения

$$\varphi = v_x \frac{\partial \Phi}{\partial v_x} + v_y \frac{\partial \Phi}{\partial v_y} - \Phi;$$

в данном случае

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_x} = \frac{d\Phi}{d\vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial v_x}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial v_y} = \frac{d\Phi}{d\vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial v_y},$$

и так как $\vartheta = \operatorname{arctg} v_y/v_x$, то

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_x} = -\frac{d\Phi}{d\vartheta} \frac{v_y}{v^2}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial v_y} = \frac{d\Phi}{d\vartheta} \frac{v_x}{v^2}.$$

Следовательно, в данном случае потенциал скоростей

$$\varphi = -\Phi,$$

и так же, как и Φ, является функцией одного только ϑ.

Из уравнений (5.111) следует, что при этом функция тока зависит только от v: $\psi = \psi(v)$. Таким образом, на плоскости годографа линии тока изобразятся концентрическими окружностями с центром в начале координат

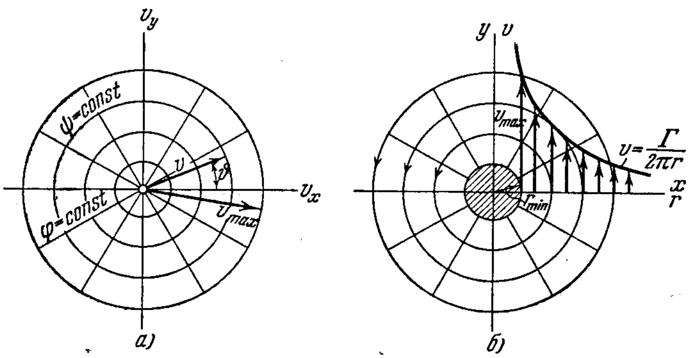

Рис. 5.88. Плоский вихрь в газе. На плоскости годографа *а*) линии располагаются внутри окружности, радиус которой равен v_{max}, а на плоскости течения *б*) — вне окружности, радиус которой равен r_{min}.

(рис. 5.88, *а*). Разумеется, *все* линии тока располагаются внутри окружности, соответствующей $v = v_{max}$.

Для того чтобы от плоскости годографа перейти к плоскости движения газа, воспользуемся сопряженным потенциалом Φ.

Согласно формулам (5.103)

$$x = \frac{\partial \Phi}{\partial v_x}, \qquad y = \frac{\partial \Phi}{\partial v_y},$$

но, как уже было вычислено,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_x} = -\frac{d\Phi}{d\vartheta} \frac{v_y}{v^2}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial v_y} = \frac{d\Phi}{d\vartheta} \frac{v_x}{v^2};$$

следовательно, в рассматриваемом случае

$$x = -C_1 \frac{v_y}{v^2}, \qquad y = C_1 \frac{v_x}{v^2}.$$

Отсюда находим:

$$x^2 + y^2 = \frac{C_1}{v^2}.$$

Величина вектора скорости определится теперь как функция от длины радиуса вектора r на плоскости движения

$$v = \frac{\sqrt{C_1}}{r}$$

или, в ином обозначении:

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi r}. \tag{5.115}$$

Направление вектора скорости можно характеризовать тангенсом угла его наклона к оси x:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{x}{y} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \theta},$$

где θ есть полярный угол на плоскости движения. Из последнего равенства заключаем, что вектор скорости любой точки перпендикулярен к ее радиусу-вектору. Линии тока являются, таким образом, концентрическими окружностями с центром в начале координат, и рассматриваемое движение действительно представляет собою плоский вихрь. Однако теперь мы можем существенно уточнить область применимости формулы (5.115), что раньше, в кинематике жидкости, когда действующие в жидкости силы не принимались во внимание, не могло быть сделано. Скорость движения газа вследствие предположения, что всегда давление $p > 0$, как известно, не может быть больше $v_{\max}$. Из формулы (5.115) следует, что при этом r не может быть меньше

$$r_{\min} = \frac{\Gamma}{2\pi v_{\max}}.$$

Таким образом, формула (5.115) пригодна только вне окружности с центром в начале координат и радиусом, равным $r_{\min}$ (рис. 5.88, *б*).

Пример 2. *Плоский источник (или сток) в газе.* Рассмотрим плоское установившееся движение газа, для которого сопряженный потенциал Φ зависит в переменных v, ϑ только от одного v. Из уравнения (5.114) следует, что в этом случае $\Phi(v)$ должно удовлетворять равенству

$$\frac{d^2\Phi}{dv^2} + \frac{1}{v}\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)\frac{d\Phi}{dv} = 0,$$

или, в иной записи,

$$\frac{d\left(\dfrac{d\Phi}{dv}\right)}{\dfrac{d\Phi}{dv}} = -\left(\frac{1}{v} - \frac{v}{a^2}\right) dv.$$

В этом уравнении

$$a^2 = a_\infty^2 + \frac{k-1}{2}\left(V_\infty^2 - v^2\right),$$

или, если ограничимся случаем, когда скорость в бесконечности $V_\infty = 0$, то

$$a^2 = a_0^2 - \frac{k-1}{2} v^2.$$

Подставляя это значение a^2 в уравнение для $d\Phi/dv$ и интегрируя, получим:

$$\ln \frac{d\Phi}{dv} = -\ln v + \ln\left(a_0^2 - \frac{k-1}{2} v^2\right)^{-1/(k-1)} + \ln C,$$

откуда

$$\frac{d\Phi}{dv} = \frac{C}{v\left(a_0^2 - \dfrac{k-1}{2} v^2\right)^{1/(k-1)}}.$$

Если подставить в последнюю формулу $a_0^2 = \frac{k-1}{2} v_{\max}^2$, то она примет вид

$$\frac{d\Phi}{dv} = \frac{C_1}{v\,(v_{\max}^2 - v^2)^{1/(k-1)}},$$

где C_1 есть соответственно измененное значение постоянной C.

Для того чтобы найти зависимость между скоростью и координатами, воспользуемся формулами (5.103). В данном случае

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v_x} = \frac{d\Phi}{dv}\frac{\partial v}{\partial v_x} = \frac{d\Phi}{dv}\frac{v_x}{v},$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial v_y} = \frac{d\Phi}{dv}\frac{\partial v}{\partial v_y} = \frac{d\Phi}{dv}\frac{v_y}{v}.$$

Следовательно, по формулам (5.103)

$$x = \frac{C_1 v_x}{v^2\,(v_{\max}^2 - v^2)^{1/(k-1)}},$$
$$y = \frac{C_1 v_y}{v^2\,(v_{\max}^2 - v^2)^{1/(k-1)}}.$$

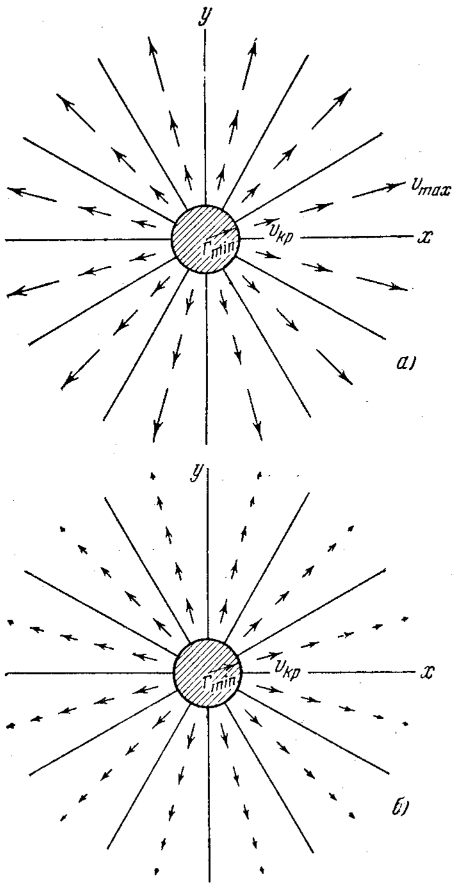

Рис. 5.89. Плоский источник в газе: *а*) случай $v > v_{кр}$; скорость возрастает при удалении от окружности $r = r_{\min}$ от $v = v_{кр}$ до $v = v_{\max}$; *б*) случай $v < v_{кр}$; скорость убывает при удалении от окружности $r = r_{\min}$ от $v = v_{кр}$ до $v = 0$.

Возводя последние равенства в квадрат и складывая, находим:

$$x^2 + y^2 = r^2 = \frac{C_1^2}{v^2\,(v_{\max}^2 - v^2)^{2/(k-1)}};$$

отсюда

$$v\,(v_{\max}^2 - v^2)^{1/(k-1)} = \frac{C_1}{r}. \qquad (5.116)$$

Таким образом, величина скорости в рассматриваемом потоке газа зависит только от радиуса-вектора r точки. Направление вектора скорости определится, если разделим друг на друга равенства для y и x:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\theta.$$

Отсюда видно, что вектор скорости каждой точки направлен вдоль ее радиуса-вектора, и следовательно, рассматриваемое движение газа действительно представляет собой плоский источник (или при $C_1 < 0$ — плоский сток).

Выясним теперь, исходя из формулы (5.116), как изменяется скорость при изменении r. Заметим сначала, что, как видно из этой формулы, при $r = \infty$ может быть или $v = 0$, или $v = v_{\max}$. Рассматриваемый поток является, таким образом, неоднозначным потоком в том смысле, что значению $r = \infty$ и, как увидим далее, всякой другой точке на плоскости течения соответствуют два разных значения скорости. Иными словами, формула (5.116) дает закон изменения скорости вдоль радиуса для двух разных потенциальных потоков газа.

Для простоты вычислений будем рассматривать r как функцию от v и найдем экстремум этой функции. Дифференцируя обе части равенства (5.116), получаем:

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{C_1}{r}\right)=(v_{\max}^2-v^2)^{1/(k-1)}-\frac{2v^2}{k-1}(v_{\max}^2-v^2)^{1/(k-1)-1}=$$

$$=(v_{\max}^2-v^2)^{1/(k-1)-1}\left(v_{\max}^2-v^2-\frac{2v^2}{k-1}\right)=$$

$$=\frac{1}{k-1}(v_{\max}^2-v^2)^{(2-k)/(k-1)}\left[(k-1)v_{\max}^2-(k+1)v^2\right].$$

Эта производная обращается в нуль при двух значениях v: при $v=v_{\max}$, что дает для r максимальное значение, равное бесконечности, и при

$$v=\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,v_{\max}=v_{\text{кр}},$$

что дает для r минимальное значение, равное, как показывает формула (5.116)

$$r_{\min}=\frac{C_1}{\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{1/2}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{1/(k-1)}v_{\max}^{(k+1)/(k-1)}}.$$

Скорость, при которой r достигает минимума, является, как следует из формулы (2.42), критической скоростью. Таким образом, на плоскости одного из рассматриваемых потоков $r=\infty$ при $v=v_{\max}$ и при уменьшении скорости до значения $v=v_{\text{кр}}$ r убывает до значения $r=r_{\min}$. При дальнейшем уменьшении скорости от $v=v_{\text{кр}}$ до нуля r вновь возрастает от $r=r_{\min}$ до $r=\infty$; но это происходит уже на плоскости другого из рассматриваемых потоков. Итак, один из этих потоков представляет собою *сверхзвуковой* источник (или сток), другой представляет собою *дозвуковой* источник (или сток) (рис. 5.89). В обоих случаях истечение происходит по радиусам из точек окружности с центром в начале координат и радиусом, равным $r_{\min}$.

Переход от дозвуковой скорости к сверхзвуковой, или обратно, ни в одном из этих потоков не имеет места.

Аналогичный характер имеет распределение скоростей в случае пространственного источника (или стока) в газе [1]).

§ 34. Потенциальное движение газа с дозвуковыми скоростями. Приближенные методы Чаплыгина и Христиановича

В § 32 было установлено, что задача о плоском потенциальном движении газа приводится к решению уравнений Чаплыгина

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\frac{1}{\rho v}\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta},\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}=\frac{v}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial v}$$

при соответствующих граничных условиях на плоскости течения. Для решения этих уравнений С. А. Чаплыгиным был предложен приближенный

[1]) Отметим, что плоский вихрь и источник или сток являются единственными потенциальными потоками, у которых форма линий тока не зависит от числа M.