течения соответствуют два разных значения скорости. Иными словами, формула (5.116) дает закон изменения скорости вдоль радиуса для двух разных потенциальных потоков газа.

Для простоты вычислений будем рассматривать r как функцию от v и найдем экстремум этой функции. Дифференцируя обе части равенства (5.116), получаем:

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{C_1}{r}\right)=(v_{\max}^2-v^2)^{1/(k-1)}-\frac{2v^2}{k-1}(v_{\max}^2-v^2)^{1/(k-1)-1}=$$

$$=(v_{\max}^2-v^2)^{1/(k-1)-1}\left(v_{\max}^2-v^2-\frac{2v^2}{k-1}\right)=$$

$$=\frac{1}{k-1}(v_{\max}^2-v^2)^{(2-k)/(k-1)}\left[(k-1)v_{\max}^2-(k+1)v^2\right].$$

Эта производная обращается в нуль при двух значениях v: при $v=v_{\max}$, что дает для r максимальное значение, равное бесконечности, и при

$$v=\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,v_{\max}=v_{\text{кр}},$$

что дает для r минимальное значение, равное, как показывает формула (5.116)

$$r_{\min}=\frac{C_1}{\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{1/2}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{1/(k-1)}v_{\max}^{(k+1)/(k-1)}}.$$

Скорость, при которой r достигает минимума, является, как следует из формулы (2.42), критической скоростью. Таким образом, на плоскости одного из рассматриваемых потоков $r=\infty$ при $v=v_{\max}$ и при уменьшении скорости до значения $v=v_{\text{кр}}$ r убывает до значения $r=r_{\min}$. При дальнейшем уменьшении скорости от $v=v_{\text{кр}}$ до нуля r вновь возрастает от $r=r_{\min}$ до $r=\infty$; но это происходит уже на плоскости другого из рассматриваемых потоков. Итак, один из этих потоков представляет собою *сверхзвуковой* источник (или сток), другой представляет собою *дозвуковой* источник (или сток) (рис. 5.89). В обоих случаях истечение происходит по радиусам из точек окружности с центром в начале координат и радиусом, равным $r_{\min}$.

Переход от дозвуковой скорости к сверхзвуковой, или обратно, ни в одном из этих потоков не имеет места.

Аналогичный характер имеет распределение скоростей в случае пространственного источника (или стока) в газе [1]).

§ 34. Потенциальное движение газа с дозвуковыми скоростями. Приближенные методы Чаплыгина и Христиановича

В § 32 было установлено, что задача о плоском потенциальном движении газа приводится к решению уравнений Чаплыгина

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\frac{1}{\rho v}\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta},\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}=\frac{v}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial v}$$

при соответствующих граничных условиях на плоскости течения. Для решения этих уравнений С. А. Чаплыгиным был предложен приближенный

[1]) Отметим, что плоский вихрь и источник или сток являются единственными потенциальными потоками, у которых форма линий тока не зависит от числа M.

метод (в уже упоминавшейся ранее его работе «О газовых струях»), который заключается в следующем.

При адиабатическом процессе плотность газа в точке торможения потока определяется, как известно (гл. II, § 12), формулой

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{1/(k-1)};$$

отсюда следует:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 + \frac{k-1}{2} \frac{v^2}{a^2}\right)^{-1/(k-1)},$$

или

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 = \left(1 + \frac{k-1}{2} \frac{v^2}{a^2}\right)^{-2/(k-1)}. \tag{5.117}$$

Предполагая, что движение газа есть дозвуковое (т. е. что везде в потоке $v < a$), сможем разложить правую часть последнего равенства в степенной ряд; ограничиваясь в этом ряде первыми двумя слагаемыми, получим приближенное равенство (пригодное для малых значений M):

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 = 1 - \frac{v^2}{a^2}. \tag{5.118}$$

Эта зависимость плотности от скорости используется в приближенном методе Чаплыгина для расчета дозвукового движения газа. С геометрической точки зрения замена точного равенства (5.117) приближенным (5.118) означает замену кривой линии на рис. 5.90 прямой линией, которая представляет собою касательную к этой кривой при $M = 0$. Из последнего равенства следует:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{a^2}};$$

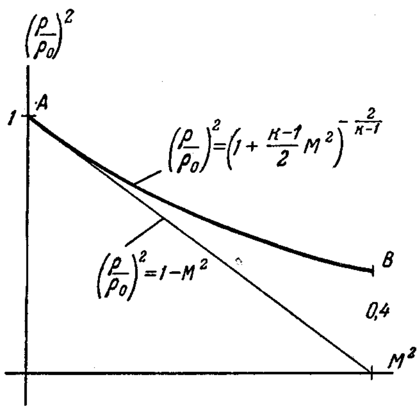

Рис. 5.90. В методе Чаплыгина кривая, изображающая зависимость $(\rho/\rho_0)^2$ от M^2, приближенно заменяется касательной к этой кривой, проведенной при $M = 0$.

подставляя это выражение в уравнения Чаплыгина, получаем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{a^2}}}{v} \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\frac{\psi}{\rho_0}\right), \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{a^2}}} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\psi}{\rho_0}\right),$$

или

$$\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{a^2}}} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\frac{\psi}{\rho_0}\right), \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{a^2}}} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\psi}{\rho_0}\right).$$

Вид этих уравнений показывает, что если вместо v ввести новую независимую переменную s, такую, что

$$\frac{ds}{dv} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{a^2}}}{v}$$

(она была предложена впоследствии С. А. Христиановичем), и заменить ψ/ρ_0 через $\bar{\psi}$, то эти уравнения перейдут в уравнения Коши — Римана, связывающие потенциал скоростей с функцией тока для несжимаемой жидкости (гл. IV, § 16). В самом деле, левая часть первого уравнения изобразится в виде

$$\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{a^2}}}\frac{\partial\varphi}{\partial v}=\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{a^2}}}\frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{ds}{dv}=\frac{\partial\varphi}{\partial s},$$

а правая часть второго уравнения — в виде

$$\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{a^2}}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\psi}{\rho_0}\right)=\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{a^2}}}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial s}\frac{ds}{dv}=\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial s},$$

и мы получаем из уравнений Чаплыгина следующие приближенные уравнения:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}=-\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\vartheta},\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}=\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial s}. \tag{5.119}$$

В новых переменных функции φ и $\bar{\psi}$ являются сопряженными гармоническими функциями, и для решения уравнения Лапласа, которому каждая из них удовлетворяет, могут быть применены известные из предыдущего методы (наложение потоков, конформное преобразование и т. д.).

Приближенный метод Чаплыгина был применен Н. А. Слезкиным к решению задачи о непрерывном обтекании тела дозвуковым потоком газа[1]). Возможность дальнейшего улучшения приближенного метода Чаплыгина была указана Л. С. Лейбензоном[2]).

Заметим, что при больших дозвуковых скоростях можно более точно заменить зависимость (5.117) линейной зависимостью, чем это сделано в методе Чаплыгина. Для этого нужно проводить не касательную к кривой на рис. 5.90 (ибо касательная с возрастанием M быстро удаляется от кривой), а секущую. Если, например, провести прямую через точки A и B, соответствующие $\mathsf{M}=0$ и $\mathsf{M}=1$, то ее уравнение будет иметь вид

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2=1-\left[1-\left(\frac{k+1}{2}\right)^{-2/(k+1)}\right]\mathsf{M}^2\approx 1-0{,}6\mathsf{M}^2.$$

В этом случае новая независимая переменная s будет определяться соотношением

$$\frac{ds}{dv}=\frac{\sqrt{1-\left[1-\left(\frac{k+1}{2}\right)^{-2/(k+1)}\right]\frac{v^2}{a^2}}}{v},$$

и вновь уравнения Чаплыгина переходят в приближенные уравнения (5.119).

Иной метод для решения этой же задачи о безотрывном обтекании тела плоским потенциальным потоком газа, имеющим везде дозвуковую скорость, был предложен С. А. Христиановичем[3]).

---

[1]) Слезкин Н. А., К вопросу о плоском движении газа, Ученые записки МГУ, вып. VII, 1937, а также Докл. Академии наук СССР, т. III, № 9, 1936.

[2]) Лейбензон Л. С., К теории движения газа, Докл. Академии наук СССР, т. III, 1935.

[3]) Христианович С. А., Обтекание тел газом при больших дозвуковых скоростях, Труды ЦАГИ, вып. 481, 1940, а также Христианович С. А. и Юрьев И. М., Обтекание профиля при докритической скорости потока, Прикладная математика и механика, т. XI, вып. 1, 1947.

В методе Христиановича не вводится никаких предположений о законе изменения плотности; обтекание контура потоком газа приближенно заменяется в этом методе обтеканием контура некоторым фиктивным потоком несжимаемой жидкости.

Имея в виду придать уравнениям Чаплыгина форму, близкую к форме уравнений Коши—Римана, связывающих потенциал скоростей и функцию тока в случае движения несжимаемой жидкости, введем снова вместо v независимую переменную s, определяемую соотношением

$$\frac{ds}{dv}=\frac{1}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{a^2}}, \quad \left(\frac{v}{a}<1\right).$$

Так как

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}=\frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{ds}{dv}=\frac{1}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{a^2}}\frac{\partial\varphi}{\partial s},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial v}=\frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{ds}{dv}=\frac{1}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{a^2}}\frac{\partial\psi}{\partial s},$$

то, подставляя эти выражения в уравнения Чаплыгина, получим:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\frac{1}{\rho}\sqrt{1-\frac{v^2}{a^2}}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}=\frac{1}{\rho}\sqrt{1-\frac{v^2}{a^2}}\frac{\partial\psi}{\partial s}.$$

Для того чтобы привести коэффициент при производной от ψ к безразмерному виду, введем вместо ψ функцию $\bar{\psi}=\psi/\rho_0$, где ρ_0 — плотность покоящегося газа; тогда будем иметь:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}=-\frac{\rho_0}{\rho}\sqrt{1-\frac{v^2}{a^2}}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\vartheta}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}=\frac{\rho_0}{\rho}\sqrt{1-\frac{v^2}{a^2}}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial s}.$$

Если обозначить

$$\sqrt{K}=\frac{\rho_0}{\rho}\sqrt{1-\frac{v^2}{a^2}},$$

то уравнения Чаплыгина запишутся в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}=-\sqrt{K}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\vartheta}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}=\sqrt{K}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial s}. \tag{5.120}$$

Рассмотрим комплексную функцию $\sigma=s-i\vartheta$ и комплексную независимую переменную $\zeta=\xi+i\eta$; пусть на плоскости ζ имеется в условиях потока несжимаемой жидкости контур, который в действительности обтекается потоком газа. Так как $\sigma=f(\zeta)$, то вещественная и мнимая части удовлетворяют уравнениям Коши—Римана:

$$\frac{\partial s}{\partial\xi}=-\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta}, \qquad \frac{\partial s}{\partial\eta}=\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}. \tag{5.121}$$

Перейдем и в уравнениях Чаплыгина к независимым переменным ξ и η; имея в виду, что $s=f_1(\xi, \eta)$ и $\vartheta=f_2(\xi, \eta)$, можем написать:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}=\frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial\xi}+\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi},$$

или, в силу уравнений (5.120) и (5.121):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}=\sqrt{K}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\vartheta}\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta}+\sqrt{K}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial\eta}=\sqrt{K}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\eta}.$$

Аналогично находим:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=\frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial\eta}+\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta}=-\sqrt{K}\,\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\vartheta}\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}-\sqrt{K}\,\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial\xi}=-\sqrt{K}\,\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\xi}.$$

Таким образом, уравнения Чаплыгина переходят в следующие:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}=\sqrt{K}\,\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\eta},\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=-\sqrt{K}\,\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\xi};\tag{5.122}$$

здесь K есть функция s, а s в свою очередь зависит от ξ и η по уравнениям (5.121).

Функцию K можно выразить через приведенную скорость λ, представляющую собой, как известно, отношение местной скорости к критической:

$$\lambda=\frac{v}{v_{\text{кр}}}.$$

В результате получается:

$$\sqrt{K}=\sqrt{\frac{1-\lambda^2}{\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{k+1}{k-1}}}}.$$

График этой функции изображен на рис. 5.91; из него видно, что $\sqrt{K}$ при $\lambda<0{,}5$ мало отличается от единицы.

Зависимость $\sqrt{K}$ от s может быть выражена в параметрической форме с помощью величины λ. В самом деле, из формулы для s следует:

$$s=\int\sqrt{1-\frac{v^2}{a^2}}\,\frac{dv}{v}=\int\sqrt{\frac{1-\lambda^2}{1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2}}\,\frac{d\lambda}{\lambda}.$$

При малых значениях $\frac{v}{a}$ или малых λ величина s равна с точностью до постоянного слагаемого $\ln v$ или $\ln\lambda$. Если обозначить $s=\ln c\tilde{\lambda}$ и выбрать постоянную интегрирования c так, чтобы $\lim\limits_{\lambda\to 0}\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}=1$, то вычисления показывают, что при $\lambda\leqslant 0{,}6$ $\tilde{\lambda}\approx\lambda$. График зависимости $\tilde{\lambda}$ от λ также представлен на рис. 5.91.

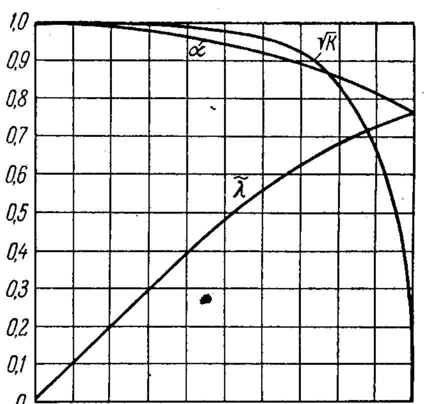

Рис. 5.91. Вспомогательные функции в методе Христиановича; $K=\Phi(\lambda)$.

Уравнения (5.121) показывают, что s и ϑ можно рассматривать соответственно как логарифм вектора скорости и угол, составляемый этим вектором с осью абсцисс для некоторого потока несжимаемой жидкости, обтекающего заданный контур на плоскости ξ, η. В самом деле, если обозначим через φ_0 и ψ_0 потенциал скоростей и функцию тока этого потока, то его характеристическая функция будет равна $w=\varphi_0+i\psi_0$, а производная от характеристической функции по $\zeta=\xi+i\eta$ будет равна вектору, сопряженному с вектором скорости этого потока v:

$$\frac{dw}{d\zeta}=\tilde{v}_x-i\tilde{v}_y=\tilde{v}e^{-i\vartheta}.$$

Логарифмируя последнее выражение, получим:

$$\ln\frac{dw}{d\zeta}=\ln\tilde{v}-i\vartheta=s-i\vartheta,$$

если обозначить $s=\ln\tilde{v}$. Таким образом, вещественная и мнимая части логарифма комплексной скорости $\tilde{v}e^{-i\vartheta}$ удовлетворяют уравнениям (5.121), и следовательно, для того чтобы решить эти уравнения, нужно определить поле скоростей при обтекании контура потоком несжимаемой жидкости, имеющим на бесконечности скорость, равную $\tilde{v}_\infty$. Значение $\tilde{v}_\infty$ или соответствующее значение $\tilde{\lambda}_\infty$ можно найти по заданной скорости обтекания контура газовым потоком V_∞ и соответствующему значению λ_∞ с помощью графика $\tilde{\lambda}=f(\lambda)$ или формулы для s.

После того как $\tilde{\lambda}$ определено как функция координат ξ и η, K будет также известной функцией координат; уравнения (5.122) представляют собою тогда линейные уравнения. Христианович решает их, полагая приближенно, что $K=\mathrm{const}=K_\infty$, где K_∞ есть значение этой величины при $\lambda=\lambda_\infty$. Тогда уравнения (5.122) представляют собою уравнения Коши—Римана, и их решения, соответствующие граничным условиям на заданном контуре, легко получаются из потенциала скоростей φ_0 и функции тока ψ_0 фиктивного потока несжимаемой жидкости, обтекающего заданный контур.

В самом деле, уравнения, которые получаются из уравнений (5.122) заменой K на K_∞:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}=\sqrt{K_\infty}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\eta},\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=-\sqrt{K_\infty}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\xi},$$

и граничные условия для φ и ψ удовлетворяются, если положим:

$$\varphi=\varphi_0,\qquad \bar{\psi}=\frac{1}{\sqrt{K_\infty}}\psi_0.$$

§ 35. Пересчет по методу Христиановича скоростей и давлений от несжимаемой среды на дозвуковое движение сжимаемой среды. Определение критического значения M по распределению давлений в несжимаемой среде

Метод Христиановича позволяет вычислить распределение давлений по контуру сечения тела в случае газового потока, зная распределение давлений для того же контура в потоке несжимаемой жидкости; для этого необходимо предположить, ограничиваясь малыми значениями λ, что деформация контура при переходе от потока несжимаемой жидкости к потоку газа незначительна, и пренебречь этой деформацией.

Допустим, что нам известно распределение давлений по контуру в потоке несжимаемой жидкости. При отсутствии сил тяжести коэффициент давления в данной точке есть величина постоянная для всех скоростей. В самом деле, по уравнению Бернулли при этих условиях

$$p_\infty+\frac{\rho V_1^2}{2}=p+\frac{\rho v_1^2}{2},$$

откуда

$$\bar{p}_{\text{несж}}=1-\frac{v_1^2}{V_1^2};$$

так как в данной точке v_1/V_1 есть величина постоянная при всех значениях скорости на бесконечности V_1, то остается постоянным и $\bar{p}$.