Логарифмируя последнее выражение, получим:

$$\ln \frac{dw}{d\zeta} = \ln \tilde{v} - i\vartheta = s - i\vartheta,$$

если обозначить $s = \ln \tilde{v}$. Таким образом, вещественная и мнимая части логарифма комплексной скорости $\tilde{v}e^{-i\vartheta}$ удовлетворяют уравнениям (5.121), и следовательно, для того чтобы решить эти уравнения, нужно определить поле скоростей при обтекании контура потоком несжимаемой жидкости, имеющим на бесконечности скорость, равную $\tilde{v}_\infty$. Значение $\tilde{v}_\infty$ или соответствующее значение $\tilde{\lambda}_\infty$ можно найти по заданной скорости обтекания контура газовым потоком V_∞ и соответствующему значению λ_∞ с помощью графика $\tilde{\lambda} = f(\lambda)$ или формулы для s.

После того как $\tilde{\lambda}$ определено как функция координат ξ и η, K будет также известной функцией координат; уравнения (5.122) представляют собою тогда линейные уравнения. Христианович решает их, полагая приближенно, что $K = \mathrm{const} = K_\infty$, где K_∞ есть значение этой величины при $\lambda = \lambda_\infty$. Тогда уравнения (5.122) представляют собою уравнения Коши—Римана, и их решения, соответствующие граничным условиям на заданном контуре, легко получаются из потенциала скоростей φ_0 и функции тока ψ_0 фиктивного потока несжимаемой жидкости, обтекающего заданный контур.

В самом деле, уравнения, которые получаются из уравнений (5.122) заменой K на K_∞:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = \sqrt{K_\infty}\,\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\eta}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = -\sqrt{K_\infty}\,\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\xi},$$

и граничные условия для φ и ψ удовлетворяются, если положим:

$$\varphi = \varphi_0, \qquad \bar{\psi} = \frac{1}{\sqrt{K_\infty}}\,\psi_0.$$

§ 35. Пересчет по методу Христиановича скоростей и давлений от несжимаемой среды на дозвуковое движение сжимаемой среды. Определение критического значения M по распределению давлений в несжимаемой среде

Метод Христиановича позволяет вычислить распределение давлений по контуру сечения тела в случае газового потока, зная распределение давлений для того же контура в потоке несжимаемой жидкости; для этого необходимо предположить, ограничиваясь малыми значениями λ, что деформация контура при переходе от потока несжимаемой жидкости к потоку газа незначительна, и пренебречь этой деформацией.

Допустим, что нам известно распределение давлений по контуру в потоке несжимаемой жидкости. При отсутствии сил тяжести коэффициент давления в данной точке есть величина постоянная для всех скоростей. В самом деле, по уравнению Бернулли при этих условиях

$$p_\infty + \frac{\rho V_1^2}{2} = p + \frac{\rho v_1^2}{2},$$

откуда

$$\bar{p}_{\text{несж}} = 1 - \frac{v_1^2}{V_1^2};$$

так как в данной точке v_1/V_1 есть величина постоянная при всех значениях скорости на бесконечности V_1, то остается постоянным и $\bar{p}$.

Желая вычислить коэффициент давления в какой-либо точке дозвукового потока газа, рассмотрим соответствующий этому потоку фиктивный поток несжимаемой жидкости, для которого местные скорости обозначим через $\tilde{v}$, а скорость на бесконечности — через $\tilde{V}_\infty$.

Для потока несжимаемой жидкости коэффициенты давления, по предположению, известны, и так как они одинаковы для всех скоростей потока на бесконечности, то можно написать:

$$\bar{p}_{\text{несж}} = 1 - \frac{\tilde{v}^2}{\tilde{V}_\infty^2} = 1 - \frac{\tilde{\lambda}^2}{\tilde{\lambda}_\infty^2} = 1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_\infty^2}\frac{\alpha^2}{\alpha_\infty^2},$$

где $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\lambda}_\infty$ относятся к потоку несжимаемой жидкости, λ и λ_∞ — к потоку газа, а через α и α_∞ обозначены соответствующие значения отношения $\tilde{\lambda}/\lambda$.

Из последнего равенства находим значения λ в тех точках контура, для которых известно $\bar{p}_{\text{несж}}$:

$$\lambda = \lambda_\infty \frac{\alpha_\infty}{\alpha} \sqrt{1 - \bar{p}_{\text{несж}}}. \tag{5.123}$$

Аналогичное соотношение получается между местной скоростью v в потоке газа и скоростью в этом же потоке на бесконечности V:

$$v = V \frac{\alpha_\infty}{\alpha} \sqrt{1 - \bar{p}_{\text{несж}}}.$$

Если скорость V_∞ задана, то входящие сюда величины α_∞ и α могут быть определены следующим образом. По величине V_∞ и соответствующему значению $v_{\text{кр}}$ находим λ_∞, а затем с помощью графиков, изображенных на рис. 5.91, определяем α_∞.

Далее, с помощью тех же графиков находим величину $\tilde{\lambda}_\infty$, соответствующую значению λ_∞, и по уравнению

$$\bar{p}_{\text{несж}} = 1 - \frac{\tilde{\lambda}^2}{\tilde{\lambda}_\infty^2}$$

вычисляем значение $\tilde{\lambda}$; зная $\tilde{\lambda}$, находим соответствующее λ и, наконец, α. Таким образом, графики на рис. 5.91 позволяют пересчитывать распределение скоростей в несжимаемой жидкости на движение газа с дозвуковой скоростью, *если только предполагать, что заданный контур остается при этом переходе неизменным.* Найдя путем такого пересчета скорость v при обтекании контура газовым потоком, можно затем вычислить давления по уравнению энергии для струйки газа.

Выведенные здесь формулы для пересчета скоростей дают возможность решить практически важную задачу о том, какая может быть допущена максимальная скорость на контуре профиля крыла при его обтекании несжимаемой жидкостью для того, чтобы в потоке газа с заданной скоростью на бесконечности на том же профиле не появились области сверхзвукового течения газа. Зная для каждой скорости полета величину этой максимальной скорости на профиле крыла, можно по данным продувок профилей на распределение давлений при малых скоростях выбрать профиль, у которого в полете число M_∞ будет меньше критического. Зная минимальное давление на профиле крыла, можно решить и обратную задачу, т. е. определить максимальную допустимую для данного профиля скорость полета (допустимую в том смысле, чтобы при этом не появлялась сверхзвуковая область на профиле).

Из формулы (5.123) видно, что минимальному значению коэффициента давления $\bar{p}_{\text{несж min}}$ соответствует максимальное значение λ и, следовательно, минимальное значение α:

$$\lambda_{\max}=\lambda_\infty \frac{\alpha_\infty}{\alpha_{\min}} \sqrt{1-\bar{p}_{\text{несж min}}}.$$

Но так как, по определению, $\lambda=v/v_{\text{кр}}$, то максимальное значение λ, при котором на контуре профиля не появляются сверхзвуковые скорости, равно единице. По графику на рис. 5.91 находим, что этому соответствует $\alpha_{\min}=0{,}758$. Вычислим теперь из последнего уравнения величину $\bar{p}_{\text{несж min}}$ при этих условиях:

$$\bar{p}_{\text{несж min}}=1-\frac{0{,}758^2}{\lambda_\infty^2\alpha_\infty^2} \cong 1-\frac{0.57}{\lambda_\infty^2\alpha_\infty^2}.$$

Величину λ_∞ можно выразить через число M_∞, соответствующее скорости полета; обозначив через $\mathsf{M}_{\text{кр}}$ значение числа M, при котором λ в какой-либо точке контура профиля становится равным единице, будем иметь:

$$\lambda_\infty=\frac{V_\infty}{v_{\text{кр}}}=\frac{V_\infty}{a_\infty}\frac{a_\infty}{v_{\text{кр}}}=\mathsf{M}_{\text{кр}}\frac{a_\infty}{v_{\text{кр}}},$$

где a_∞ есть скорость распространения звука на бесконечности. По уравнению энергии

$$V_\infty^2+\frac{2}{k-1}a_\infty^2=\frac{k+1}{k-1}v_{\text{кр}}^2;$$

отсюда

$$\frac{v_{\text{кр}}^2}{a_\infty^2}=\frac{k-1}{k+1}\mathsf{M}_{\text{кр}}^2+\frac{2}{k+1}$$

и, следовательно,

$$\lambda_\infty^2=\frac{(k+1)\,\mathsf{M}_{\text{кр}}^2}{2+(k-1)\,\mathsf{M}_{\text{кр}}^2}.$$

Формула для $\bar{p}_{\text{несж min}}$ приобретает теперь следующий вид:

$$\bar{p}_{\text{несж min}}=1-\frac{0{,}57}{\alpha_\infty^2}\,\frac{2+(k-1)\,\mathsf{M}_{\text{кр}}^2}{(k+1)\,\mathsf{M}_{\text{кр}}^2}. \tag{5.124}$$

Из этой формулы видно, что чем больше $\mathsf{M}_{\text{кр}}$, тем меньше по абсолютному значению допустимая величина разрежения при обтекании профиля несжимаемой жидкостью. Когда $\mathsf{M}_{\text{кр}}$ становится равным единице, то $\alpha_\infty=0{,}758$ и $\bar{p}_{\min}=0$. Наоборот, при уменьшении $\mathsf{M}_{\text{кр}}$ до нуля абсолютное значение $\bar{p}_{\min}$ стремится к бесконечности. Зависимость $|\bar{p}_{\text{несж min}}|$ от $\mathsf{M}_{\text{кр}}$, определяемая последней формулой, изображена на графике (рис. 5.92). С помощью этого графика (или формулы (5.124)) можно решать как прямую, так и обратную задачи, о которых шла речь выше.

Следует, однако, иметь в виду, что исходное предположение об отсутствии деформации профиля при переходе от несжимаемой жидкости к газу близко к действительности лишь при малых скоростях и становится неверным при скоростях, приближающихся в какой-либо точке к местной скорости звука. Полагая $\lambda = 1$, мы нарушаем это предположение, и следовательно, выводы будут относиться, строго говоря, к некоторому неизвестному профилю в потоке газа, соответствующему заданному профилю в потоке несжимаемой жидкости.

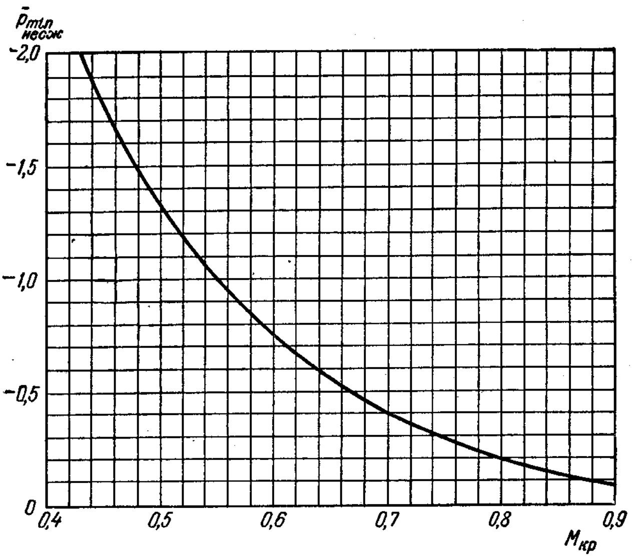

Рис. 5.92. Зависимость коэффициента минимального давления на контуре профиля при обтекании несжимаемой жидкостью от критического значения числа M для того же профиля.

Иная зависимость между величинами $\bar{p}_{несж\ min}$ и $M_{кр}$, нежели устанавливаемая формулой (5.124), была выведена Г. Ф. Бураго; эта зависимость имеет вид

$$\bar{p}_{несж\ min} = 1 - \frac{1}{M_{кр}^2}\left(\frac{2}{k+1} + \frac{k-1}{k+1} M_{кр}^2\right)^{k/(k-1)}.$$

Величины $M_{кр}$, которые получаются по этой формуле, несколько больше, чем величины $M_{кр}$ по формуле (5.124).

§ 36. Пересчет скоростей и давлений от несжимаемой среды на дозвуковое движение сжимаемой среды по методу Чаплыгина. Формула Кармана—Цзяня

Для плоского дозвукового течения идеальной среды можно вывести в явном виде зависимость между коэффициентами давления в сжимаемой жидкости и в несжимаемой, если применить приближенный метод Чаплыгина (§ 34); эта зависимость получается более точной, нежели по линейной теории (§ 27).

Напомним, что метод Чаплыгина заключается в том, что зависимость плотности от числа M задается приближенной формулой (5.118)

$$\frac{\rho^2}{\rho_0^2} = 1 - M^2,$$