сти звука. Полагая $\lambda = 1$, мы нарушаем это предположение, и следовательно, выводы будут относиться, строго говоря, к некоторому неизвестному профилю в потоке газа, соответствующему заданному профилю в потоке несжимаемой жидкости.

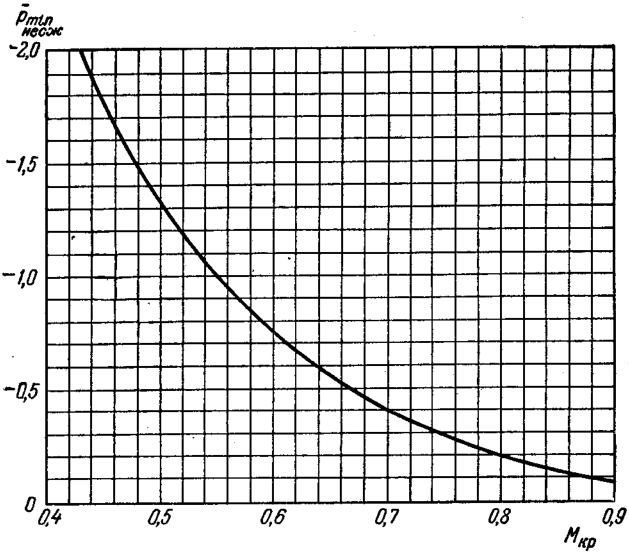

Рис. 5.92. Зависимость коэффициента минимального давления на контуре профиля при обтекании несжимаемой жидкостью от критического значения числа М для того же профиля.

Иная зависимость между величинами $\bar{p}_{\text{несж min}}$ и $\mathsf{M}_{\text{кр}}$, нежели устанавливаемая формулой (5.124), была выведена Г. Ф. Бураго; эта зависимость имеет вид

$$\bar{p}_{\text{несж min}} = 1 - \frac{1}{\mathsf{M}_{\text{кр}}^2}\left(\frac{2}{k+1} + \frac{k-1}{k+1}\mathsf{M}_{\text{кр}}^2\right)^{k/(k-1)}.$$

Величины $\mathsf{M}_{\text{кр}}$, которые получаются по этой формуле, несколько больше, чем величины $\mathsf{M}_{\text{кр}}$ по формуле (5.124).

§ 36. Пересчет скоростей и давлений от несжимаемой среды на дозвуковое движение сжимаемой среды по методу Чаплыгина. Формула Кармана—Цзяня

Для плоского дозвукового течения идеальной среды можно вывести в явном виде зависимость между коэффициентами давления в сжимаемой жидкости и в несжимаемой, если применить приближенный метод Чаплыгина (§ 34); эта зависимость получается более точной, нежели по линейной теории (§ 27).

Напомним, что метод Чаплыгина заключается в том, что зависимость плотности от числа М задается приближенной формулой (5.118)

$$\frac{\rho^2}{\rho_0^2} = 1 - \mathsf{M}^2,$$

правая часть которой представляет собой первые два слагаемых в разложении точного выражения плотности в степенной ряд. Если вместо скорости v ввести новую независимую переменную s, определяемую формулой

$$\frac{ds}{dv}=\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{a^2}}}{v},$$

то, как было доказано в § 34, уравнения Чаплыгина для потенциала скоростей φ и функции тока ψ адиабатического потока газа могут быть представлены в виде (5.119)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}=-\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\vartheta},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}=\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial s},$$

где $\bar{\psi}=\frac{\psi}{\rho_0}$, а ϑ есть угол, составляемый вектором скорости с некоторым заданным направлением. Эти уравнения являются уравнениями Коши—Римана, и следовательно, φ и $\bar{\psi}$ можно рассматривать как вещественную и мнимую части функции независимого комплексного переменного $s-i\vartheta$.

Сопоставим с движением газа, о котором здесь идет речь, движение несжимаемой жидкости, имеющее потенциал скоростей φ, функцию тока $\bar{\psi}$, скорость $\tilde{v}$ и угол, составляемый вектором скорости с некоторым направлением, равный ϑ. Характеристическая функция этого потока несжимаемой жидкости равна $w=\varphi+i\bar{\psi}$, а комплексная скорость равна

$$\frac{dw}{dz}=\tilde{v}_x-i\tilde{v}_y=\tilde{v}e^{-i\vartheta}.$$

Найдем натуральный логарифм комплексной скорости

$$\ln\frac{dw}{dz}=\ln\tilde{v}-i\vartheta;$$

если обозначить $\tilde{s}=\ln\tilde{v}$, то сможем написать:

$$\ln\frac{dw}{dz}=\tilde{s}-i\vartheta.$$

Будем рассматривать логарифм комплексной скорости $\tilde{s}-i\vartheta$ как независимую переменную, а w — как функцию. Тогда φ и $\bar{\psi}$ должны будут удовлетворять следующим уравнениям Коши—Римана:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{s}}=-\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\vartheta},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}=\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\tilde{s}}.$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями для газа, если при одних и тех же значениях ϑ дифференциалы $\tilde{s}$ и s равны друг другу. Так как

$$d\tilde{s}=\frac{d\tilde{v}}{\tilde{v}},\qquad ds=\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{a^2}}}{v}\,dv,$$

то, записывая условие равенства этих дифференциалов, получаем:

$$\frac{d\tilde{v}}{\tilde{v}}=\frac{dv}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{a^2}}. \tag{5.125}$$

Принимая это условие и предполагая, кроме того, что границы потока не изменяются при переходе от газа к несжимаемой жидкости, будем иметь одинаковые уравнения и одинаковые граничные условия для потока газа и потока несжимаемой жидкости. Уравнение (5.125) позволит при этом найти соотношение между скоростями в соответствующих точках (т. е. при одном и том же значении ϑ) потока несжимаемой жидкости и потока газа.

Для того чтобы вывести это соотношение, установим предварительно некоторые следствия, вытекающие из уравнения (5.118). Докажем, что уравнение (5.118) выполняется точно, если заменить зависимость между p и ρ, соответствующую адиабатическому процессу, линейной зависимостью между p и $1/\rho$. В самом деле, если примем, что p и $1/\rho$ связаны уравнением

$$p = b\frac{1}{\rho} + c,$$

где b и c суть некоторые постоянные коэффициенты, то будем иметь следующие дифференциальные соотношения:

$$dp = -\frac{b\,d\rho}{\rho^2}, \qquad a^2 = \frac{dp}{d\rho} = -\frac{b}{\rho^2}.$$

Из уравнения энергии в дифференциальной форме

$$\frac{1}{2}\,d(v^2) + \frac{dp}{\rho} = 0$$

в этом случае следует:

$$\frac{1}{2}\,d(v^2) - b\frac{d\rho}{\rho^3} = 0,$$

откуда, интегрируя, находим:

$$v^2 + \frac{b}{\rho^2} = \text{const} = \frac{b}{\rho_0^2}, \tag{5.126}$$

где ρ_0 есть плотность в точке торможения потока. Из последнего уравнения и формулы для a^2 получаем:

$$\frac{\rho^2}{\rho_0^2} = 1 - \frac{v^2}{a^2},$$

что полностью совпадает с уравнением (5.118). Так как $b/\rho_0^2 = -a_0^2$, то уравнение энергии (5.126) можно представить также в виде

$$v^2 + a_0^2 = a^2; \tag{5.127}$$

этим соотношением мы воспользуемся далее при интегрировании уравнения (5.125).

Вернемся теперь к выводу зависимости между скоростями в соответствующих точках потоков несжимаемой жидкости и газа. Интегрируя уравнение (5.125), будем иметь:

$$\ln\tilde{v} = \int \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{a^2}}}{v}\,dv = \int \frac{\sqrt{a^2 - v^2}}{av}\,dv.$$

Заменим здесь a его выражением по формуле (5.127); тогда получим:

$$\ln\tilde{v} = \int \frac{a_0\,dv}{v\sqrt{a_0^2 + v^2}} = -\ln\frac{a_0 + \sqrt{a_0^2 + v^2}}{v} + \ln C,$$

где $\ln C$ есть постоянная интегрирования. Из последнего равенства находим:

$$\tilde{v} = \frac{Cv}{a_0 + \sqrt{a_0^2 + v^2}}.$$

Определим постоянную C из условия, чтобы в том случае, когда газ движется со скоростью v, квадрат которой пренебрежимо мал по сравнению с a_0^2, скоростные поля в газе и в соответствующем потоке несжимаемой жидкости совпадали, т. е. чтобы при этом $\tilde{v}=v$. Нетрудно видеть, что из этого условия получается:

$$C=2a_0,$$

и следовательно,

$$\tilde{v}=\frac{2a_0 v}{a_0+\sqrt{a_0^2+v^2}}. \tag{5.128}$$

Решая это уравнение относительно v, находим:

$$v=\frac{4a_0^2\tilde{v}}{4a_0^2-\tilde{v}^2}.$$

Плотность также может быть выражена через скорости в потоке несжимаемой жидкости; из формул (5.118), (5.127) и последнего равенства получаем:

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\sqrt{1-\frac{v^2}{a^2}}=\frac{a_0}{\sqrt{a_0^2+v^2}}=\frac{4a_0^2-\tilde{v}^2}{4a_0^2+\tilde{v}^2}. \tag{5.129}$$

Перейдем теперь к вычислению коэффициента давления в сжимаемой жидкости; поставим своей задачей выразить его через коэффициент давления в соответствующей точке потока несжимаемой жидкости. Исходя из линейной зависимости между p и $1/\rho$, можем написать:

$$\bar{p}_{\text{сж}}=2\frac{b}{\rho_\infty V_\infty^2}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_\infty}\right)=-2\frac{b}{\rho_\infty^2 V_\infty^2}\left(1-\frac{\rho_\infty}{\rho}\right).$$

Величина b, которая представляет собой угловой коэффициент прямой линии, заменяющей в методе Чаплыгина адиабату, оставалась до сих пор произвольной. Определим теперь угловой коэффициент b так, чтобы эта прямая была касательной к адиабате в точке, соответствующей условиям на бесконечности, т. е. в точке $(p_\infty, 1/\rho_\infty)$. С этой целью приравняем друг другу значение производной $dp/d\rho$ в упомянутой точке на адиабате и значение производной $dp/d\rho$, вычисленное в этой же точке по линейной зависимости между p и $1/\rho$. В точках адиабаты имеем: $dp/d\rho=a^2$; в точках прямой линии $p_2=b/\rho+c$ производная $dp/d\rho$ равна $-b/\rho^2$; таким образом, получаем: $b=-a_\infty^2\rho_\infty^2$. Формула для коэффициента давления теперь примет вид

$$\bar{p}_{\text{сж}}=2\frac{a_\infty^2}{V_\infty^2}\left(1-\frac{\rho_\infty}{\rho}\right)=\frac{2}{\mathrm{M}_\infty^2}\left(1-\frac{\rho_\infty}{\rho}\right).$$

Отношение плотностей в этой формуле выразим через скорости в несжимаемой жидкости с помощью равенства (5.129)

$$\frac{\rho_\infty}{\rho}=\frac{\rho_\infty}{\rho_0}\frac{\rho_0}{\rho}=\frac{4a_0^2-\tilde{v}_\infty^2}{4a_0^2+\tilde{v}_\infty^2}\,\frac{4a_0^2+\tilde{v}^2}{4a_0^2-\tilde{v}^2};$$

но так как по формуле (5.127)

$$a_0^2=a_\infty^2-V_\infty^2,$$

то отношение плотностей равно

$$\frac{\rho_\infty}{\rho}=\frac{4(a_\infty^2-V_\infty^2)-\tilde{v}_\infty^2}{4(a_\infty^2-V_\infty^2)+\tilde{v}_\infty^2}\cdot\frac{4(a_\infty^2-V_\infty^2)+\tilde{v}_\infty^2\dfrac{\tilde{v}^2}{\tilde{v}_\infty^2}}{4(a_\infty^2-V_\infty^2)-\tilde{v}_\infty^2\dfrac{\tilde{v}^2}{\tilde{v}_\infty^2}}.$$

Из уравнения Бернулли для несжимаемой жидкости следует:

$$\frac{\tilde{v}^2}{\tilde{v}_\infty^2}=1-\bar{p}_{\text{несж}}.$$

Далее, из формул (5.127) и (5.128) получается:

$$\tilde{v}_\infty^2=\frac{2a_0V_\infty}{a_0+\sqrt{a_0^2+V_\infty^2}}=\frac{2V_\infty\sqrt{a_\infty^2-V_\infty^2}}{\sqrt{a_\infty^2-V_\infty^2}+a_\infty}.$$

Пользуясь последними выражениями для $\tilde{v}^2/\tilde{v}_\infty^2$ и $\tilde{v}_\infty$, мы преобразуем формулу для отношения плотностей, введя в нее $\bar{p}_{\text{несж}}$ и M_∞; в результате будем иметь:

$$\frac{\rho_\infty}{\rho}=\sqrt{1-\mathrm{M}_\infty^2}\,\frac{1+\sqrt{1-\mathrm{M}_\infty^2}-\mathrm{M}_\infty^2\dfrac{\bar{p}_{\text{несж}}}{2}}{1-\mathrm{M}_\infty^2+\sqrt{1-\mathrm{M}_\infty^2}+\mathrm{M}_\infty^2\dfrac{\bar{p}_{\text{несж}}}{2}}.$$

Возвращаясь теперь к формуле для $\bar{p}_{\text{несж}}$ и подставляя в нее последнее выражение, окончательно получим:

$$\bar{p}_{\text{сж}}=\frac{\bar{p}_{\text{несж}}}{\sqrt{1-\mathrm{M}_\infty^2}+\dfrac{\mathrm{M}_\infty^2}{1+\sqrt{1-\mathrm{M}_\infty^2}}\,\dfrac{\bar{p}_{\text{несж}}}{2}}. \tag{5.130}$$

Эта формула была выведена Карманом и Цзянем[1]; она позволяет пересчитывать значения коэффициента давления, полученные для несжимаемой жидкости на дозвуковой поток газа. Значения $\bar{p}_{\text{сж}}$ при отрицательных по знаку величинах $\bar{p}_{\text{несж}}$ получаются по формуле (5.130) бóльшими по абсолютной величине, нежели по линейной теории (формула (5.88)), т. е. влияние сжимаемости среды на коэффициент давления оказывается в этом случае бóльшим по формуле (5.130), чем по формуле (5.88). Сравнение результатов пересчета с опытными данными показывает, что более близкой к действительности из упомянутых двух формул является формула (5.130), несмотря на то, что при ее выводе были приняты два упрощающих предположения: замена адиабаты прямой линией и предположение о неизменности контура профиля при переходе от газа к несжимаемой жидкости. Возможно, что погрешности, происходящие от этих предположений, частично компенсируют друг друга.

§ 37. Потенциальное движение газа со сверхзвуковыми скоростями. Характеристики потока на плоскости годографа скорости

Потенциал скоростей плоского установившегося потока газа определяется, как известно из § 10, граничными условиями и уравнением (5.24)

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\left[1-\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right]+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\left[1-\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]-\frac{2}{a^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}=0.$$

Записывая дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка в общем виде

$$A\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2u}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{5.131}$$

[1] Kármán Th. and Tsien H. S., Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. VI, 1939, и Vol. VIII, 1941.