

Из уравнения Бернулли для несжимаемой жидкости следует:

$$\frac{\tilde{v}^2}{\tilde{v}_\infty^2} = 1 - \bar{p}_{\text{несж}}.$$

Далее, из формул (5.127) и (5.128) получается:

$$\tilde{v}_\infty^2 = \frac{2a_0 V_\infty}{a_0 + \sqrt{a_0^2 + V_\infty^2}} = \frac{2V_\infty \sqrt{a_\infty^2 - V_\infty^2}}{\sqrt{a_\infty^2 - V_\infty^2} + a_\infty}.$$

Пользуясь последними выражениями для $\tilde{v}^2/\tilde{v}_\infty^2$ и \tilde{v}_∞ , мы преобразуем формулу для отношения плотностей, введя в нее $\bar{p}_{\text{несж}}$ и M_∞ ; в результате будем иметь:

$$\frac{\rho_\infty}{\rho} = \sqrt{1 - M_\infty^2} \frac{1 + \sqrt{1 - M_\infty^2} - M_\infty^2 \frac{\bar{p}_{\text{несж}}}{2}}{1 - M_\infty^2 + \sqrt{1 - M_\infty^2} + M_\infty^2 \frac{\bar{p}_{\text{несж}}}{2}}.$$

Возвращаясь теперь к формуле для $\bar{p}_{\text{несж}}$ и подставляя в нее последнее выражение, окончательно получим:

$$\bar{p}_{\text{сж}} = \frac{\bar{p}_{\text{несж}}}{\sqrt{1 - M_\infty^2} + \frac{M_\infty^2}{1 + \sqrt{1 - M_\infty^2}} \frac{\bar{p}_{\text{несж}}}{2}}. \quad (5.130)$$

Эта формула была выведена Карманом и Цзянем¹⁾; она позволяет пересчитывать значения коэффициента давления, полученные для несжимаемой жидкости на дозвуковой поток газа. Значения $\bar{p}_{\text{сж}}$ при отрицательных по знаку величинах $\bar{p}_{\text{несж}}$ получаются по формуле (5.130) большими по абсолютной величине, нежели по линейной теории (формула (5.88)), т. е. влияние сжимаемости среды на коэффициент давления оказывается в этом случае большим по формуле (5.130), чем по формуле (5.88). Сравнение результатов пересчета с опытными данными показывает, что более близкой к действительности из упомянутых двух формул является формула (5.130), несмотря на то, что при ее выводе были приняты два упрощающих предположения: замена адиабаты прямой линией и предположение о неизменности контура профиля при переходе от газа к несжимаемой жидкости. Возможно, что погрешности, происходящие от этих предположений, частично компенсируют друг друга.

§ 37. Потенциальное движение газа со сверхзвуковыми скоростями.

Характеристики потока на плоскости годографа скорости

Потенциал скоростей плоского установившегося потока газа определяется, как известно из § 10, граничными условиями и уравнением (5.24)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \left[1 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \left[1 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{2}{a^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0.$$

Записывая дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка в общем виде

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (5.131)$$

¹⁾ Kármán T. H. and Tsien H. S., Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. VI, 1939, и Vol. VIII, 1941.

где A, B, C суть функции координат, искомой функции u и первых частных производных от нее по координатам, и вычисляя выражение $B^2 - AC$ для уравнения (5.24), получим:

$$\begin{aligned} B^2 - AC &= \frac{1}{a^4} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - \left[1 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] \left[1 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{a^2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] - 1 = \frac{v^2}{a^2} - 1. \end{aligned}$$

В случае сверхзвукового потока эта величина положительна, и следовательно, уравнение (5.24) является уравнением гиперболического типа.

Назовем уравнение вида

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} = \Phi \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right),$$

в которое входит только одна смешанная частная производная второго порядка, нормальным видом уравнения гиперболического типа и поставим вопрос о том, можно ли путем замены переменных вообще уравнение гиперболического типа (5.131) преобразовать к нормальному виду.

Введем новые независимые переменные

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y)$$

и определим их так, чтобы общее уравнение (5.131) приняло нормальный вид. Так как для приведения к нормальному виду нужны лишь коэффициенты при вторых частных производных, то при вычислениях, в выражениях для вторых частных производных, мы не будем выписывать членов с первыми производными, заменяя их многоточием. Выразим производные от u по x и y через производные от u по ξ и η :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \dots, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \dots, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \dots \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (5.131), получим:

$$A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2B_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right),$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= A \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2, \\ B_1 &= A \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + B \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + C \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ C_1 &= A \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2. \end{aligned}$$

Для того чтобы привести уравнение (5.131) к нормальному виду, следует положить:

$$A_1 = 0, \quad C_1 = 0.$$

Последние равенства после почленного-деления первого на $(\partial\xi/\partial y)^2$, второго на $(\partial\eta/\partial y)^2$, можно записать в форме

$$\left. \begin{aligned} A \left(\frac{\partial\xi}{\partial x} \right)^2 + 2B \left(\frac{\partial\xi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial\xi}{\partial y} \right) + C &= 0, \\ A \left(\frac{\partial\eta}{\partial x} \right)^2 + 2B \left(\frac{\partial\eta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial\eta}{\partial y} \right) + C &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.132)$$

Рассмотрим координатные линии в новых независимых переменных, т. е. линии $\xi = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$. Дифференцируя равенства

$$\xi(x, y) = \text{const}, \quad \eta(x, y) = \text{const}$$

по x и имея в виду, что на каждой такой линии y есть функция x , находим:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0.$$

Отсюда видно, что тангенс угла наклона касательной к координатным линиям равен на линиях одного семейства

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_1 = - \frac{\frac{\partial\xi}{\partial x}}{\frac{\partial\xi}{\partial y}},$$

на линиях другого семейства

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_2 = - \frac{\frac{\partial\eta}{\partial x}}{\frac{\partial\eta}{\partial y}}.$$

Следовательно, условия (5.132) приводятся для обоих семейств искомым координатных линий к одному и тому же обыкновенному дифференциальному уравнению

$$A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2B \frac{dy}{dx} + C = 0. \quad (5.133)$$

Так как $B^2 - AC$ в рассматриваемом случае есть величина положительная, то это уравнение дает два вещественных разных значения dy/dx для каждой точки на плоскости течения газа. Эти значения определяют сетку координатных линий, с помощью которой уравнение (5.131) преобразуется к нормальному виду.

Линии $\xi(x, y) = \text{const}$ и $\eta(x, y) = \text{const}$, определяемые уравнением (5.133), называются характеристическими линиями, или, коротко, *характеристиками* уравнения в частных производных (5.131). Характеристики обладают многими интересными свойствами, которые позволяют приближенно решать уравнение (5.24) при любых, вообще говоря, граничных условиях. Остановимся подробнее на изучении этих свойств.

В простейшем случае линеаризованного уравнения характеристиками являются прямые линии

$$x + y \sqrt{M_\infty^2 - 1} = \text{const}, \quad x - y \sqrt{M_\infty^2 - 1} = \text{const}.$$

В общем случае характеристики уравнения (5.24), которому удовлетворяет потенциал скоростей, будут, вообще говоря, кривыми линиями, образующими сетку на плоскости течения. Можно доказать, что, так же как в простейшем случае линеаризованного уравнения, *малые возмущения в потоке распространяются вдоль характеристик*. Характеристикам в общем случае присуще и другое свойство, аналогичное тому, которое было отмечено ранее для прямолинейной сетки: они составляют в каждой точке равные по абсолютной величине и противоположные по знаку углы с вектором скорости данной точки. Для того чтобы обнаружить это, вычислим тангенсы углов наклона касательных к двум характеристикам, исходящим из какой-либо точки, т. е. решим уравнение (5.131) относительно dy/dx :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}.$$

В общем случае, когда потенциал скорости определяется уравнением (5.24), входящие в это выражение величины равны

$$A = 1 - \frac{v_x^2}{a^2}, \quad B = -\frac{1}{a^2} v_x v_y, \quad C = 1 - \frac{v_y^2}{a^2}, \quad B^2 - AC = \frac{v^2}{a^2} - 1.$$

Тангенсы углов наклона касательных к характеристикам можно записать теперь в виде

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \frac{v_x v_y - a \sqrt{v^2 - a^2}}{v_x^2 - a^2}, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = \frac{v_x v_y + a \sqrt{v^2 - a^2}}{v_x^2 - a^2}. \quad (5.134)$$

Преобразуем последние выражения, умножив числитель и знаменатель на $v^2 = v_x^2 + v_y^2$; тогда получим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 &= \frac{v_x v_y (v^2 - a^2) + v_x v_y a^2 - a v^2 \sqrt{v^2 - a^2}}{v_x^2 (v^2 - a^2) - a^2 v_y^2} \\ &= \frac{(v_y \sqrt{v^2 - a^2} - a v_x) (v_x \sqrt{v^2 - a^2} - a v_y)}{(v_x \sqrt{v^2 - a^2} - a v_y) (v_x \sqrt{v^2 - a^2} + a v_y)} = \frac{\frac{v_y}{v_x} - \frac{a}{\sqrt{v^2 - a^2}}}{1 + \frac{v_y}{v_x} \frac{a}{\sqrt{v^2 - a^2}}}. \end{aligned}$$

Аналогично преобразуем выражение для $(dy/dx)_2$. Таким образом, мы приходим к следующим формулам для $(dy/dx)_1$ и $(dy/dx)_2$:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 &= \frac{\frac{v_y}{v_x} - \frac{a}{\sqrt{v^2 - a^2}}}{1 + \frac{v_y}{v_x} \frac{a}{\sqrt{v^2 - a^2}}}, \\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 &= \frac{\frac{v_y}{v_x} + \frac{a}{\sqrt{v^2 - a^2}}}{1 - \frac{v_y}{v_x} \frac{a}{\sqrt{v^2 - a^2}}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.135)$$

Последние формулы показывают, что $(dy/dx)_1$ можно рассматривать как тангенс разности двух углов, а $(dy/dx)_2$ как тангенс суммы тех же углов. Тангенс одного из этих углов равен v_y/v_x , и следовательно, этот угол представляет собой угол φ между вектором скорости данной точки и осью абсцисс. Тангенс другого из этих углов равен $\frac{a}{\sqrt{v^2 - a^2}}$, и следовательно,

этот угол, который мы обозначим через A , имеет синус, равный

$$\sin A = \frac{a}{v}; \quad (5.136)$$

угол A является, как отсюда видно, углом между вектором скорости и прямой, ограничивающей возмущенную область для данной точки. Формулы для $(dy/dx)_1$ и $(dy/dx)_2$ можно теперь записать в следующем виде:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\vartheta \pm A).$$

Таким образом, касательные к характеристикам, проходящим через данную точку, отклонены от вектора скорости этой точки, одна — на угол $+A$, другая — на угол $-A$ и, следовательно, вектор скорости направлен по биссектрисе угла, образуемого касательными к характеристикам (рис. 5.93).

В связи с этим из формулы (5.136) следует, что проекция вектора скорости на нормаль к характеристике равна скорости распространения звука в данной точке.

Эти свойства характеристик уравнения (5.24) позволяют весьма просто определить поле скоростей сверхзвукового потока газа, если известны характеристики. Направления векторов скорости определяются по направлениям биссектрис сетки характеристик, а модули этих векторов — по величине проекции скорости на нормаль к характеристике, равной скорости звука. При этом следует учесть, что величины скорости газа и скорости распространения звука связаны уравнением энергии. Таким образом, для каждой точки получаются два уравнения с двумя неизвестными v и a :

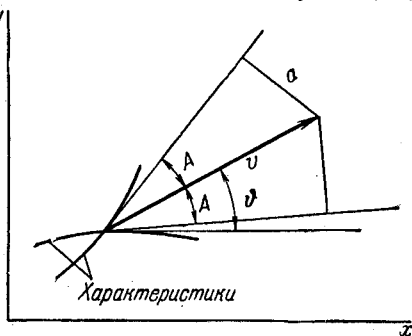


Рис. 5.93. Вектор скорости в данной точке направлен по биссектрисе угла, образуемого касательными к характеристикам, проходящим через эту точку. Проекция скорости на нормаль к характеристике равна скорости звука в данной точке.

$$\begin{aligned} v \sin A &= a, \\ v^2 + \frac{2}{k-1} a^2 &= V_\infty^2 + \frac{2}{k-1} a_\infty^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует:

$$v^2 = \frac{V_\infty^2 + \frac{2}{k-1} a_\infty^2}{1 + \frac{2}{k-1} \sin^2 A}. \quad (5.137)$$

Однако определить характеристики на плоскости течения газа, не зная поля скоростей, невозможно, так как коэффициенты A , B , C дифференциального уравнения характеристик (5.133) сами зависят от составляющих скорости. Иначе будет обстоять дело, если от плоскости течения газа перейти к плоскости годографа скорости, т. е. к плоскости v_x, v_y . Уравнение (5.113) для потенциала скоростей имеет в переменных v, ϑ вид

$$\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) v^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + v \left(1 + \frac{v^4}{a^4}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} = 0.$$

Здесь

$$A = v^2 \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right), \quad B = 0, \quad C = \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)^2;$$

поэтому дифференциальное уравнение характеристик будет иметь вид

$$v^2 \left(\frac{d\vartheta}{dv}\right)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) = 0,$$

откуда получаем:

$$\frac{d\vartheta}{dv} = \pm \frac{1}{v} \sqrt{\frac{v^2}{a^2} - 1}. \quad (5.138)$$

Это уравнение можно проинтегрировать в общем виде. Зависимость v от ϑ на характеристиках получится при этом в виде одной формулы для всех случаев движения газа. Таким образом, *на плоскости годографа форма характеристик не зависит от вида движения и одинакова для всех сверхзвуковых потоков*; ее можно поэтому для всех потоков вычислить заранее. Интегрируя последнее уравнение, находим:

$$\vartheta = \pm \int \sqrt{\frac{v^2}{a^2} - 1} \frac{dv}{v}.$$

Здесь a зависит от v по уравнению энергии

$$\frac{k-1}{2} v^2 + a^2 = \frac{k+1}{2} v_{кр}^2,$$

откуда

$$a^2 = \frac{1}{2} [(k+1) v_{кр}^2 - (k-1) v^2].$$

Подставляя последнее выражение под знак интеграла, получим:

$$\vartheta = \pm \int \sqrt{\frac{(k+1)(v^2 - v_{кр}^2)}{(k+1)v_{кр}^2 - (k-1)v^2}} \frac{dv}{v}.$$

В результате интегрирования будем иметь:

$$\vartheta = \pm \left[\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(k-1)(v^2 - v_{кр}^2)}{(k+1)v_{кр}^2 - (k-1)v^2}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(k+1)(v^2 - v_{кр}^2)}{(k+1)v_{кр}^2 - (k-1)v^2}} \right] + C. \quad (5.139)$$

Каждая кривая этого семейства (соответствующая определенному значению постоянной интегрирования C и определенному знаку в правой части формулы) представляет собой так называемую эпициклоиду, т. е. кривую, которую описывает точка на окружности, катящейся без скольжения снаружи другой окружности. Можно проверить непосредственным вычислением, что в данном случае эпициклоиды на плоскости годографа, изображаемые последним уравнением, получаются при качении круга, диаметр которого равен $v_{\max} - v_{кр}$ (рис. 5.94) по окружности радиуса $v = v_{кр}$ (отделяющей дозвуковую область от сверхзвуковой).

Таким образом, все характеристики располагаются в кольце между концентрическими окружностями, радиусы которых равны $v_{кр}$ и v_{\max} , причем через каждую точку этой области проходят две характеристики: одна, при-

надлежащая к семейству, которое получается при качении упомянутого круга в одном направлении, другая, принадлежащая к семейству, которое получается при качении того же круга в другом направлении.

Для расчетов с помощью характеристик удобно иметь чертеж, на котором они были бы нанесены в определенном масштабе и с определенным интервалом. Такая диаграмма характеристик для воздуха ($k = 1,405$) дана на рис. 5.95. Здесь изображен сектор на плоскости годографа скорости, соответствующий центральному углу в 70° . На нем нанесены: наружная окружность, соответствующая максимальной скорости газа, внутренняя окружность, соответствующая его критической скорости, и отрезки эллипсоидов, соответствующих значениям C в формуле для ϑ , отличающимся друг от друга на 2° . Кроме того, на диаграмме изображены дуги окружностей промежуточного радиуса (между $v_{кр}$ и v_{max}) и радиальные прямые (через каждые 5°).

Каждой эллипсоиде на диаграмме характеристик присвоен определенный номер, изменяющийся на ± 1 при изменении начального угла $\vartheta_0 = \pm C$ на $\pm 2^\circ$. Таким образом, в точках, находящихся на окружности $v = v_{кр}$, сумма номеров эллипсоидов обоих семейств, исходящих из этих точек, есть величина постоянная; она принята равной 1000. Сумма номеров эллипсоидов, пересекающихся в точках, находящихся на других окружностях, с промежуточными радиусами между $v_{кр}$ и v_{max} также есть величина постоянная. В самом деле, представив формулу (5.139) в виде

$$\vartheta = \pm f\left(\frac{v}{v_{кр}}\right) + C,$$

где через f обозначено выражение в квадратных скобках (формула (5.139)), и обозначив величины C для эллипсоидов первого семейства через ϑ_{01} , для эллипсоидов второго семейства — через ϑ_{02} , получим:

$$\vartheta_1 = f\left(\frac{v}{v_{кр}}\right) - \vartheta_{01}, \quad \vartheta_2 = -f\left(\frac{v}{v_{кр}}\right) + \vartheta_{02}.$$

Отсюда следует, что в точках пересечения эллипсоидов одного семейства с эллипсоидами другого семейства, т. е. при $\vartheta_1 = \vartheta_2$ и $v_1 = v_2$, имеют место соотношения

$$\vartheta_{01} + \vartheta_{02} = 2f\left(\frac{v}{v_{кр}}\right),$$

$$\vartheta_{02} - \vartheta_{01} = \vartheta_1 + \vartheta_2.$$

Номера эллипсоидов, как указывалось выше, связаны линейной зависимостью с ϑ_{01} и ϑ_{02} . Из последних соотношений видно, что при этом на окружностях $v/v_{кр} = \text{const}$ сумма номеров эллипсоидов есть величина постоянная, а на прямых $\vartheta_1 + \vartheta_2 = \text{const}$ разность этих номеров есть величина постоянная. Значения этих сумм и разностей также указаны на диаграмме характеристик. Вместо диаграммы характеристик можно пользоваться непосредственно формулой (5.139).

Вернемся теперь от характеристик на плоскости годографа скорости к характеристикам на плоскости течения газа. Направления характеристик

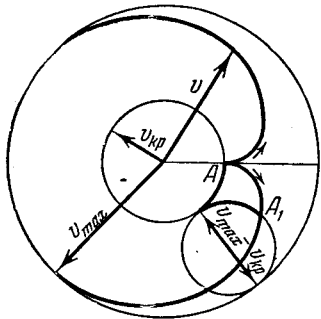


Рис. 5.94. Характеристиками на плоскости годографа скорости являются эллипсоиды, получающиеся при качении без скольжения круга диаметром $v_{max} - v_{кр}$ по окружности радиуса $v_{кр}$. При качении в одну сторону получаются характеристики одного семейства, при качении в другую сторону — характеристики другого семейства. На чертеже показаны две эллипсоиды, исходящие из точки A ($C = 0$).

в соответствующих точках на этих плоскостях между собою непосредственно связаны. Для того чтобы установить зависимость между этими направлениями, вычислим тангенс угла наклона касательной к характеристике, про-

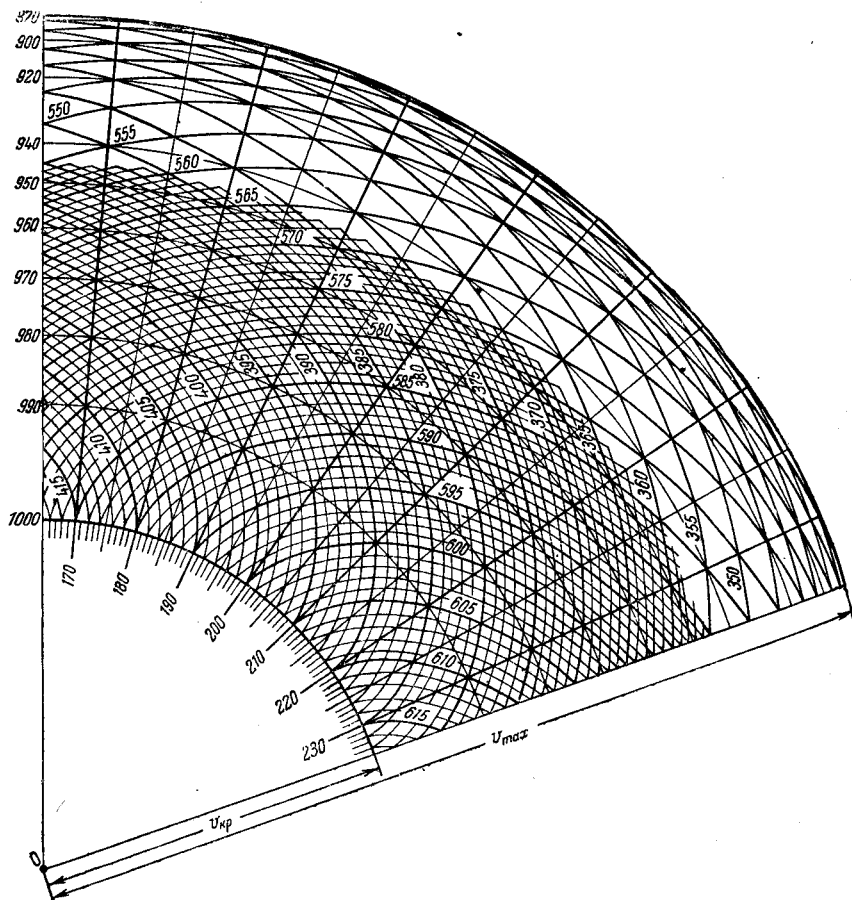


Рис. 5.95. Диаграмма характеристик на плоскости годографа скорости при $k = 1,405$.

веденной на плоскости годографа скорости. Будем исходить из формулы (5.138), которую запишем в виде

$$\frac{1}{2} \frac{dv^2}{d\vartheta} = \pm \frac{av^2}{\sqrt{v^2 - a^2}}.$$

Перейдем в этой формуле от полярных координат v , ϑ к прямоугольным координатам v_x , v_y . Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} dv^2 &= v_x dv_x + v_y dv_y, \\ d\vartheta &= d\left(\arctg \frac{v_y}{v_x}\right) = \frac{v_x dv_y - v_y dv_x}{v^2}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в предыдущую формулу, получим:

$$\frac{v_x dv_x + v_y dv_y}{v_x dv_y - v_y dv_x} = \pm \frac{a}{\sqrt{v^2 - a^2}}.$$

Отсюда находим:

$$\frac{dv_y}{dv_x} = - \frac{1 \pm \frac{v_y}{v_x} \frac{a}{\sqrt{v^2 - a^2}}}{\frac{v_y}{v_x} \mp \frac{a}{\sqrt{v^2 - a^2}}}.$$

Сопоставляя это выражение с формулами (5.135) для dy/dx , видим, что

$$\frac{dy}{dx} \frac{dv_y}{dv_x} = -1$$

и, следовательно, характеристики на плоскости течения газа *нормальны в соответствующих точках к характеристикам на плоскости годографа скорости* (если ось x параллельна оси v_x). При этом знаку \pm в формулах (5.135) соответствует знак $-$ в формуле для dv_y/dv_x , так что характеристики первого семейства на плоскости годографа скорости нормальны

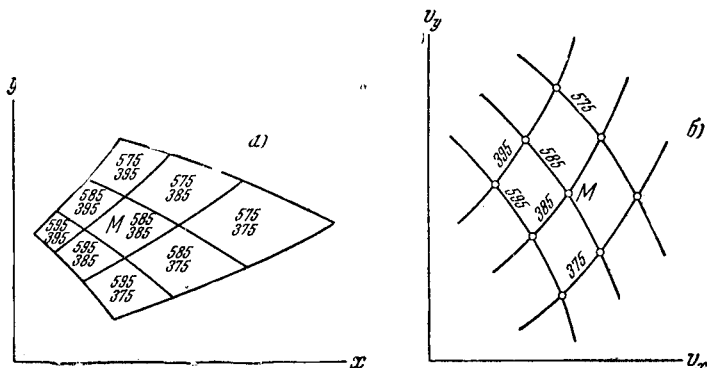


Рис. 5.96. Характеристики на плоскости (а) течения газа нормальны в соответствующих точках к характеристикам на плоскости (б) годографа скорости. Ячейки сетки характеристик на плоскости течения газа обозначены номерами эписциклоид, которые пересекаются в соответствующих этим ячейкам узлах на плоскости годографа скорости.

в соответствующих точках к характеристикам второго семейства на плоскости течения, а характеристики второго семейства на плоскости годографа скорости нормальны к характеристикам первого семейства на плоскости течения (рис. 5.96). Таким образом, каждой линии одной сетки соответствует ряд отрезков нормалей к ней в другой сетке; узлу, в котором встречаются четыре отрезка линий одной сетки (например, узлу M на рис. 5.96) соответствует в другой сетке четырехугольник (ячейка M на рис. 5.96), образованный нормальями к отрезкам линий первой сетки. Для того чтобы зафиксировать это соответствие, каждую ячейку сетки характеристик обозначают при построениях двумя номерами эписциклоид, которые пересекаются в узле, соответствующем этой ячейке. По изменению номеров ячеек в направлении течения газа можно сразу судить о том, нарастает ли скорость вдоль потока или убывает, т. е. являются ли характеристики линиями разрежения или линиями уплотнения.