§ 38. Определение поля скоростей плоского сверхзукового потока газа методом характеристик

Свойство ортогональности характеристик на плоскости годографа скорости и характеристик на плоскости течения позволяет, имея раз навсегда построенную диаграмму характеристик (рис. 5.95) на плоскости годографа, приближенно, графическим путем строить характеристики на плоскости течения для каждого конкретного случая сверхзвукового потока газа. Построив характеристики на плоскости течения, можно затем по формуле (5.137), или иным путем — например, с помощью той же диаграммы характеристик — определить поле скоростей.

Рассмотрим построение характеристик для случая, когда сверхзвуковой поток обтекает заданный контур, имея на бесконечности заданную скорость (рис. 5.97). Перед линией скачка уплотнения, исходящей из носовой точки профиля, поток, как известно из предыдущего, невозмущен и, следовательно, здесь во всех точках скорость его постоянна по величине и направлению и равна V_∞. На этой линии скорость уменьшается (от величины $v_1 = V_\infty$ до величины v_2), и направление ее изменяется тем больше, чем ближе к носку профиля расположена на линии рассматриваемая точка.

Как известно из предыдущего, зная скорость набегающего потока и угол его отклонения ϑ_0 у точки A, можно вычислить угол наклона линии скачка и скорость v_2 непосредственно за этой линией.

Итак, будем считать, что наклон линии скачка уплотнения нам известен, и величина скорости непосредственно за этой линией также известна. Скорость v_2 на обтекаемом контуре непосредственно за точкой A известна, таким образом, и по величине, и по направлению. Обозначим через A_1 точку на плоскости v_x, v_y, соответствующую этой скорости. Заменим приближенно криволинейную дугу рассматриваемого контура ломаной линией $ABCD$ ... и будем считать, что в пределах каждого звена этой ломаной линии скорость остается неизменной по величине и направлению. Зная скорость на звене AB, можно построить отрезки характеристик, исходящих из точки B: для этого следует через эту точку провести нормали к характеристикам, пересекающимся в точке A_1 на плоскости годографа скорости. Перейдем теперь к звену BC. Направление скорости в точках этого звена должно совпадать с направлением отрезка BC, а величина может быть приближенно вычислена по формулам (5.95), выведенным в § 29 для сверхзвукового потока, обтекающего малый угол, образованный двумя плоскостями. Применительно к данному случаю формулу для скорости на отрезке BC можно записать в виде

$$v_{BC} \approx v_{AB}\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\Delta\vartheta}{\sqrt{\mathsf{M}^2 - 1}}\right) \approx v_{AB}\left(1 - \frac{\Delta\vartheta}{\sqrt{\mathsf{M}^2 - 1}}\right),$$

ибо, по линейной теории, $v = V + v'_x$.

Вместо вычислений по этой формуле можно воспользоваться для определения скорости на звене BC простым графическим построением. Обозначив разность $v_{AB} - v_{BC}$ через Δv, представим последнюю формулу в виде

$$-\Delta v = \frac{v\Delta\vartheta}{\sqrt{\mathsf{M}^2 - 1}};$$

так как

$$\mathsf{M} = \frac{v}{a},$$

то формула для определения v_{BC} эквивалентна следующей:

$$-\frac{\Delta\vartheta}{\Delta v} = \frac{1}{v}\sqrt{\frac{v^2}{a^2} - 1}.$$

Последнее равенство совпадает (при замене приращений дифференциалами) с дифференциальным уравнением характеристик на плоскости годографа скорости. Это обстоятельство позволяет сделать вывод о том, что годографом скорости при обтекании малого угла, образованного двумя

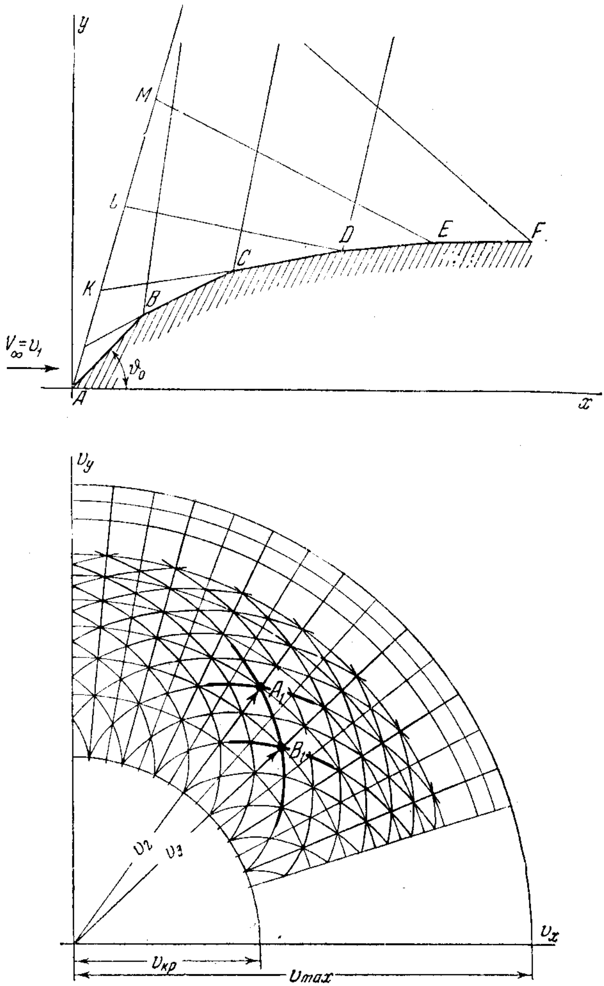

Рис. 5.97. Приближенное построение сетки характеристик для сверхзвукового потока, обтекающего заданный контур.

плоскостями, является характеристика, т. е. одна из соответствующих эпициклоид. Так как она должна проходить через начальную точку A, то мы получаем следующий способ графического определения величины скорости на звене BC. Из начала координат плоскости v_x, v_y проводим параллельно BC радиус-вектор до пересечения с эпициклоидой, проходящей через точку A в направлении возрастающих скоростей (в данном случае).

При обтекании вогнутого угла следует взять эпициклоиду, вдоль которой скорость убывает. Расстояние от начала координат до точки пересечения B_1 дает в соответствующем масштабе величину скорости на отрезке BC.

Построения, которые были здесь описаны для звеньев AB и BC, повторяются затем шаг за шагом для других, следующих один за другим звеньев: BC и CD, CD и EF и т. д. Из точки C проводятся отрезки нормально к эпициклоидам, пересекающимся в точке B_1 на диаграмме характеристик: эти отрезки являются отрезками характеристик на плоскости течения. Далее с помощью эпициклоиды A_1B_1 определяется величина скорости на отрезке CD, и построение вновь повторяется для следующего звена.

В точках пересечения характеристик (K, L, M, ...) можно непосредственно определить направление вектора скорости и, зная на линии AM его величину, построить последовательно, одну за другой, линии тока, которые берут свое начало на AM.

При построении характеристик описанным способом приходится всякий раз проводить нормали к эпициклоидам, изображенным на плоскости годографа. Так как при этом возможны значительные погрешности, то следует предпочесть иной графический прием построения характеристик, более точный и простой, нежели непосредственное проведение нормалей к эпициклоидам. Этот прием базируется на геометрическом изображении зависимости, устанавливаемой формулой (5.137) между величиной скорости в данной точке сверхзвукового потока и углом A для той же точки. Перепишем формулу (5.137) в несколько ином виде, заменив в ней $V_\infty^2 + \frac{2}{k-1}a_\infty^2$ через $v_{\max}^2$:

$$v^2 = \frac{v_{\max}^2}{1 + \frac{2}{k-1}\sin^2 A}. \tag{5.140}$$

Рассматривая здесь v как величину радиуса-вектора на плоскости годографа скорости, а A — как полярный угол, нетрудно обнаружить, что зависимость v от A изобразится на плоскости годографа скорости в виде эллипса. В самом деле, если в уравнении эллипса, написанном в декартовой системе координат:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

перейти к полярной системе, в которой $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, то получится:

$$r^2 = \frac{a^2}{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2}\sin^2\theta},$$

что полностью соответствует формуле (5.140).

Сопоставляя формулу (5.140) с последним равенством, находим:

$$a = v_{\max},$$

$$\frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{2}{k-1}.$$

Отсюда следует, что

$$b = v_{\max}\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} = v_{\text{кр}}.$$

Итак, зависимость между v и A для данной точки изображается на плоскости годографа скорости эллипсом, большая полуось которого равна максимальной скорости, а малая — критической скорости (рис. 5.98).

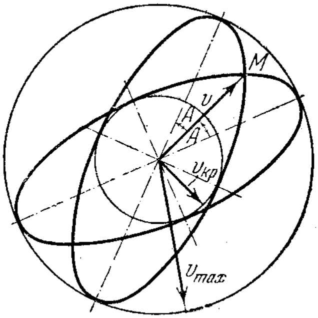

Рис. 5.98. Зависимость v от A изображается на плоскости годографа эллипсом, большая полуось которого равна $v_{\max}$, а малая — $v_{кр}$. Зная вектор $\boldsymbol{v}$ для точки M, можно определить направления характеристик, проходящих через соответствующую точку на плоскости течения.

С помощью этого эллипса можно очень просто найти направления характеристик, исходящих из данной точки, если известен вектор скорости этой точки. Для этого следует заготовить предварительно в соответствующем масштабе чертеж эллипса на кальке или целлулоиде и наложить, например, на диаграмму характеристик, на которой отмечена точка, соответствующая известному вектору скорости. Затем, оставляя все время центр эллипса совмещенным с началом координат диаграммы характеристик, нужно поворачивать его до тех пор, пока он не пройдет через отмеченную точку. Рис. 5.98 показывает, что каждой точке M в сверхзвуковой области соответствуют два положения эллипса, при которых он проходит через эту точку. Направления большой оси эллипса при этих положениях его составляют с вектором скорости точки M углы, равные углу A, и, следовательно, являются направлениями характеристик. Направления малых осей при этом будут параллельны касательным к эпициклоидам, проходящим через точку M[1]).

§ 39. Течение идеального газа с гиперзвуковой скоростью

Мы рассмотрим теперь в общих чертах течения идеального газа при больших значениях числа M; эти течения называются гиперзвуковыми и обладают рядом свойств, которые обусловили выделение гиперзвуковых течений в особую отрасль аэродинамики[2]).

Как известно из предыдущего, при возрастании M_∞ угол наклона скачка уплотнения уменьшается и скачок уплотнения приближается к поверхности тела; вследствие этого с возрастанием M_∞ сужается область возмущения, ограниченная поверхностью скачка и поверхностью тела. Поэтому важнейшей особенностью гиперзвуковых течений является то, что *возмущенная телом область весьма узка* (рис. 5.99).

Основное предположение теории малых возмущений (линейной теории течения газа) о том, что тело является тонким по сравнению с возмущенной областью, при гиперзвуковых скоростях не соответствует действительности, так как область возмущения узка. Поэтому

---

[1]) О методе характеристик в случае пространственного течения газа см. Бай Ши-и, Введение в теорию течения сжимаемой жидкости, ИЛ, 1962.

[2]) Более подробно можно познакомиться с теорией гиперзвуковых течений по книгам: Черный Г. Г., Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью, Физматгиз, 1959; Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф., Теория гиперзвуковых течений, ИЛ, 1962.