

Итак, зависимость между v и A для данной точки изображается на плоскости годографа скорости эллипсом, большая полуось которого равна максимальной скорости, а малая — критической скорости (рис. 5.98).

С помощью этого эллипса можно очень просто найти направления характеристик, исходящих из данной точки, если известен вектор скорости этой точки. Для этого следует заготовить предварительно в соответствующем масштабе чертеж эллипса на кальке или целлулоиде и наложить, например, на диаграмму характеристик, на которой отмечена точка, соответствующая известному вектору скорости. Затем, оставляя все время центр эллипса совмещенным с началом координат диаграммы характеристик, нужно поворачивать его до тех пор, пока он не пройдет через отмеченную точку. Рис. 5.98 показывает, что каждой точке M в сверхзвуковой области соответствуют два положения эллипса, при которых он проходит через эту точку. Направления большей оси эллипса при этих положениях его составляют с вектором скорости точки M углы, равные углу A , и, следовательно, являются направлениями характеристик. Направления малых осей при этом будут параллельны касательным к эпициклоидам, проходящим через точку M^1 .

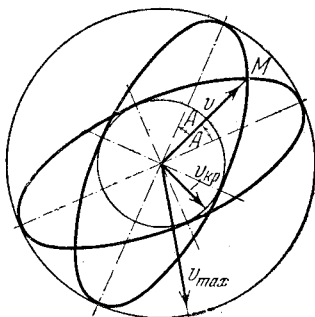


Рис. 5.98. Зависимость v от A изображается на плоскости годографа скорости эллипсом, большая полуось которого равна v_{max} , а малая — v_{cr} . Зная вектор v для точки M , можно определить направления характеристик, проходящих через соответствующую точку на плоскости течения.

§ 39. Течение идеального газа с гиперзвуковой скоростью

Мы рассмотрим теперь в общих чертах течения идеального газа при больших значениях числа M ; эти течения называются гиперзвуковыми и обладают рядом свойств, которые обусловили выделение гиперзвуковых течений в особую отрасль аэродинамики²⁾.

Как известно из предыдущего, при возрастании M_∞ угол наклона скачка уплотнения уменьшается и скачок уплотнения приближается к поверхности тела; вследствие этого с возрастанием M_∞ сужается область возмущения, ограниченная поверхностью скачка и поверхностью тела. Поэтому важнейшей особенностью гиперзвуковых течений является то, что *возмущенная телом область весьма узка* (рис. 5.99).

Основное предположение теории малых возмущений (линейной теории течения газа) о том, что тело является тонким по сравнению с возмущенной областью, при гиперзвуковых скоростях не соответствует действительности, так как область возмущения узка. Поэтому

¹⁾ О методе характеристик в случае пространственного течения газа см. Б а й Ш и-и, Введение в теорию течения сжимаемой жидкости, ИЛ, 1962.

²⁾ Более подробно можно познакомиться с теорией гиперзвуковых течений по книгам: Черный Г. Г., Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью, Физматгиз, 1959; Хейз У. Д., Пропстин Р. Ф., Теория гиперзвуковых течений, ИЛ, 1932.

линейная теория неприменима к течениям с гиперзвуковыми скоростями; в этом состоит вторая характерная особенность гиперзвуковых течений. Расчеты и опыты подтверждают этот вывод; так, например, распределение давления по контуру тонкого профиля при обтекании его с углом атаки порядка 5° , рассчитанное по линейной теории, расходится с опытными данными, уже начиная с M_∞ , приблизительно равного 4.

Так как при торможении гиперзвукового потока выделяется большое количество тепла и развивается высокая температура, то *изменяются физико-химические свойства газа* (по сравнению с течением при обычной температуре) и в этом состоит третья характерная особенность гиперзвуковых течений.

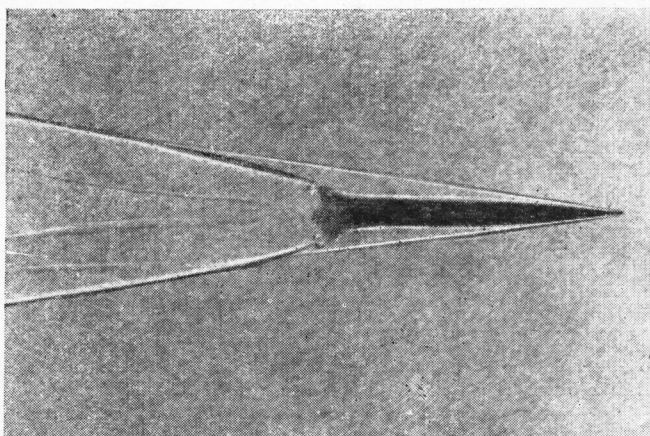


Рис. 5.99. Теневая фотография обтекания воздухом тонкого тела при $M = 9,6$.

При возрастании температуры возникают, наряду с поступательным и вращательным движениями молекул газа еще колебательные движения атомов в молекулах. В связи с этим *теплоемкость газа* как при постоянном давлении, так и при постоянном объеме *увеличивается* (ибо часть тепловой энергии переходит в энергию колебательного движения атомов). Изменяется с изменением температуры и отношение теплоемкостей $c_p/c_v = k$; с возрастанием температуры эта величина уменьшается. Изменение теплоемкости влечет за собой, в частности, изменение угла наклона скачка уплотнения и изменение параметров потока за скачком по сравнению с соответствующими величинами при малых температурах, когда c_p и c_v не зависят от температуры. Расчеты показывают, что изменения параметров потока за скачком, вызванные изменениями теплоемкости, становятся ощутимыми, уже начиная с M_∞ , приблизительно равного 3.

При больших температурах скорость теплового движения молекул и их кинетическая энергия становятся настолько большими, что при

столкновениях молекул происходит их расщепление; в результате соударения молекул образуются отдельные свободные атомы. Так возникает *диссоциация молекул* — их разложение на атомы. Этот процесс сопровождается обратным процессом — химической реакцией воссоединения свободных атомов в молекулы (ассоциация атомов); диссоциация и ассоциация могут компенсировать и не компенсировать друг друга.

Если диссоциация происходит в смеси нескольких газов (какой является воздух), то в результате изменяется химический состав смеси. В воздухе, например, диссоциация приводит к образованию окиси азота, которая имеет иные механические и тепловые свойства, чем кислород и азот. Процессы диссоциации молекул, происходящие в скачках уплотнения, значительно усложняют расчет параметров потока, так как в условиях диссоциации эти параметры зависят не только от M_∞ и угла отклонения потока, но также от температуры и давления в набегающем потоке.

При высоких температурах энергия колебательного движения атомов может стать настолько большой, что возникает *передача энергии путем лучеиспускания*. Эта передача энергии сопровождается свечением газа и также является характерной особенностью гиперзвуковых течений.

Для гиперзвуковых течений характерны также большое изменение давления и плотности в головной ударной волне и вследствие узости возмущенной области сравнительно малое изменение скорости в ней.

Рассмотрим теперь некоторые простейшие гиперзвуковые течения газа: плоское обтекание вогнутого и выпуклого углов, образованных двумя плоскостями, потоком, направленным перпендикулярно к линии пересечения плоскостей. Для простоты будем при этом считать, что физико-химические свойства газа не зависят от M_∞ и остаются такими же, как при малых скоростях.

Предположим сначала, что угол ϑ_0 между плоскостями положителен по знаку (т. е. угол является вогнутым), что он мал по величине и что число M_1 для набегающего потока, равное M_∞ , велико. В соответствии с этим угол наклона скачка уплотнения β при ударном сжатии потока можно считать малым. Исходя из этих предположений, упростим формулу (5.55), которая связывает β , ϑ_0 и M_1 . Положим в этой формуле $\operatorname{tg} \vartheta_0 = \vartheta_0$, $\cos \beta = 1$, $\sin \beta = \beta$; тогда будем иметь:

$$\vartheta_0 = \frac{M_\infty^2 \beta^2 - 1}{\beta + M_\infty^2 \beta \frac{k+1}{2} - M_\infty^2 \beta^2}.$$

Пренебрежем в знаменателе слагаемым, содержащим β^3 , по сравнению со слагаемыми, содержащими β ; тогда, деля обе части последнего равенства на ϑ_0^2 , получим для β/ϑ_0 квадратное уравнение

$$\left(\frac{\beta}{\vartheta_0}\right)^2 - \frac{k+1}{2} \frac{\beta}{\vartheta_0} - \frac{1}{M_\infty^2 \vartheta_0^2} = 0.$$

Мы видим отсюда, что β/ϑ_0 при гиперзвуковых скоростях является функцией произведения $M_\infty \vartheta_0$. Решая это уравнение, находим:

$$\frac{\beta}{\vartheta_0} = \frac{k+1}{4} + \sqrt{\left(\frac{k+1}{4}\right)^2 + \frac{1}{(M_\infty \vartheta_0)^2}}; \quad (5.141)$$

второе решение, содержащее знак минус перед корнем, отбрасываем как физически невозможное: β получается отрицательным по знаку.

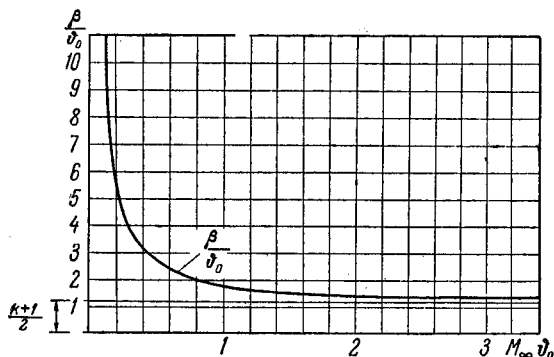


Рис. 5.100. Зависимость β/ϑ_0 от $M_\infty \vartheta_0$ при гиперзвуковых скоростях.

Зависимость β/ϑ_0 от $M_\infty \vartheta_0$, определяемая последней формулой, изображена на графике (рис. 5.100). Как видно из графика и формулы, с возрастанием $M_\infty \vartheta_0$ величина β/ϑ_0 убывает, стремясь при $M_\infty \vartheta_0 \rightarrow \infty$ к пределу, равному $\frac{k+1}{2} \approx 1,2$.

Зная угол наклона скачка уплотнения, можно вычислить коэффициент давления для области за скачком. По формуле (5.43) имеем:

$$\bar{p} = \frac{p - p_1}{\rho_1 v_1^2 / 2} = \frac{4}{k+1} \left(\sin^2 \beta - \frac{a_1^2}{v_1^2} \right) = \frac{4}{k+1} \left(\sin^2 \beta - \frac{1}{M_\infty^2} \right).$$

Отсюда получается после замены $\sin \beta = \beta$:

$$\frac{\bar{p}}{\beta^2} = \frac{4}{k+1} \left(1 - \frac{1}{M_\infty^2 \beta^2} \right).$$

Можно выразить \bar{p} и непосредственно через ϑ_0 . Заметим сначала, что наиболее просто выражается \bar{p} через произведение $\beta \vartheta_0$. В самом деле, из уравнения для β/ϑ_0 следует:

$$\frac{\beta^2}{\vartheta_0^2} \left(1 - \frac{1}{M_\infty^2 \beta^2} \right) = \frac{k+1}{2} \frac{\beta}{\vartheta_0},$$

откуда

$$1 - \frac{1}{M_\infty^2 \beta^2} = \frac{k+1}{2} \frac{\vartheta_0}{\beta}.$$

Подставляя это выражение в формулу для \bar{p}/β^2 , получим:

$$\bar{p} = 2\beta\vartheta_0,$$

или если заменить здесь β по формуле (5.141), то будем иметь:

$$\frac{\bar{p}}{\vartheta_0^2} = \frac{k+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{k+1}{2}\right)^2 + \frac{4}{(M_\infty \vartheta_0)^2}}. \quad (5.142)$$

Таким образом, \bar{p}/ϑ_0^2 зависит при гиперзвуковых скоростях только от произведения $M_\infty \vartheta_0$; эта зависимость изображена на рис. 5.101.

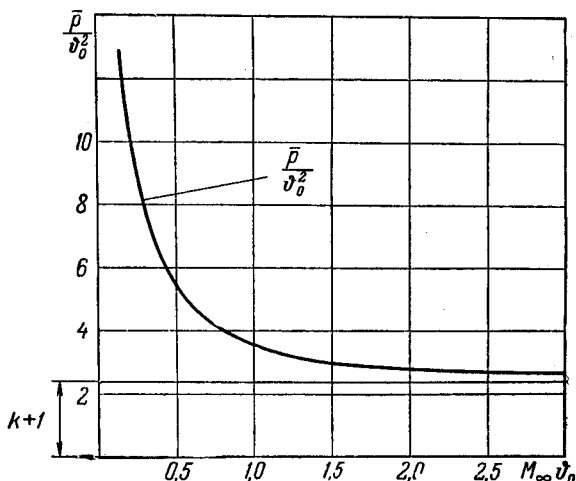


Рис. 5.101. Зависимость \bar{p}/ϑ_0^2 от $M_\infty \vartheta_0$ при ударном сжатии гиперзвукового потока.

Предположим теперь, что ϑ_0 — величина отрицательная, т. е. угол является выпуклым. Тогда скачок уплотнения отсутствует и происходит плавное расширение потока. Зависимость между изменением скорости потока dv и изменением его направления $d\vartheta$ определяется в этом случае формулой (5.138); так как знак dv противоположен знаку $d\vartheta$, то мы выберем в этой формуле знак минус:

$$\frac{d\vartheta}{dv} = -\frac{1}{v} \sqrt{\frac{v^2}{a^2} - 1}.$$

При гиперзвуковых скоростях M_∞^2 значительно больше единицы; пренебрегая единицей по сравнению с M^2 , получим:

$$\frac{d\vartheta}{dv} = -\frac{1}{a}.$$

В случае адиабатического процесса a связано с v уравнением энергии

$$\frac{a^2}{a_0^2} = 1 - \frac{v^2}{v_{\text{max}}^2};$$

следовательно, в этом случае

$$\frac{d\vartheta}{dv} = - \frac{1}{a_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{v_{\max}^2}}}.$$

Интегрируя это уравнение, получим:

$$\vartheta = - \frac{v_{\max}}{a_0} \arcsin \frac{v}{v_{\max}} + C;$$

определим здесь постоянную интегрирования C из условия, чтобы при $\vartheta = 0$ v равнялось v_{∞} ; тогда будем иметь:

$$\frac{a_0}{v_{\max}} \vartheta = \arcsin \frac{v_{\infty}}{v_{\max}} - \arcsin \frac{v}{v_{\max}}.$$

Выражая разность арксинусов через арксинус по известной формуле

$$\arcsin p - \arcsin q = \arcsin (p \sqrt{1 - q^2} - q \sqrt{1 - p^2}),$$

находим при $\vartheta = \vartheta_0$:

$$\vartheta_0 = \frac{v_{\max}}{a_0} \arcsin \frac{v_{\infty} a - v a_{\infty}}{a_0 v_{\max}}.$$

Предполагая, как и ранее, что ϑ мало по величине, сможем заменить угол его синусом

$$\vartheta_0 = \frac{a a_{\infty}}{a_0^2} (M_{\infty} - M).$$

Отношения a/a_0 и a_{∞}/a_0 вычислим, исходя из уравнения энергии для адиабатического процесса:

$$\frac{a}{a_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k-1}{2} M^2}}, \quad \frac{a_{\infty}}{a_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k-1}{2} M_{\infty}^2}}.$$

Для ϑ_0 теперь получается формула

$$\vartheta_0 = \frac{M_{\infty} - M}{\sqrt{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_{\infty}^2\right) \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)}}.$$

Отсюда, возводя обе части равенства в квадрат и затем пренебрегая слагаемыми, содержащими ϑ_0^2 (кроме слагаемого, в которое входит произведение $M_{\infty}^2 \vartheta_0^2$), получим для M_{∞}/M квадратное уравнение

$$\left(\frac{M_{\infty}}{M}\right)^2 - 2\left(\frac{M_{\infty}}{M}\right) - \left(\frac{k-1}{2}\right)^2 M_{\infty}^2 \vartheta_0^2 + 1 = 0.$$

Решая это уравнение, находим:

$$\frac{M_{\infty}}{M} = 1 + M_{\infty} \vartheta_0 \frac{k-1}{2}, \quad (5.143)$$

где $-\frac{2}{k-1} < M_{\infty} \vartheta_0 < 0$.

Таким образом, при больших величинах M_∞ отношение M_∞/M при расширении потока зависит только от $M_\infty \vartheta_0$.

Вычислим теперь коэффициент давления для области потока за расширением. С этой целью выразим давление торможения через p_∞ и через давление p после расширения потока. По известной формуле для давления торможения в адиабатическом потоке имеем:

$$p_0 = p_\infty \left(1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2 \right)^{k/(k-1)} = p \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{k/(k-1)}.$$

Отсюда следует:

$$\frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \right)^{k/(k-1)} \approx \left(\frac{M_\infty}{M} \right)^{2k/(k-1)}.$$

Коэффициент давления равен

$$\bar{p} = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho_\infty v_\infty^2}{2}} = \frac{p_\infty \left[\left(\frac{M_\infty}{M} \right)^{2k/(k-1)} - 1 \right]}{\frac{k}{2} p_\infty M_\infty^2} = \frac{\left(\frac{M_\infty}{M} \right)^{2k/(k-1)} - 1}{\frac{k}{2} M_\infty^2}.$$

Подставляя в эту формулу вместо M_∞/M его выражение (5.143), находим:

$$\frac{\bar{p}}{\vartheta_0^2} = \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_\infty \vartheta_0 \right)^{2k/(k-1)} - 1}{\frac{k}{2} (M_\infty \vartheta_0)^2};$$

эта зависимость изображена на рис. 5.102. Как видно из последней формулы, величина \bar{p}/ϑ_0^2 при адиабатическом расширении гиперзвукового потока зависит не от M_∞ и ϑ_0 в отдельности взятых, а только от произведения $M_\infty \vartheta_0$. Аналогичное свойство величины \bar{p}/ϑ_0^2 было отмечено ранее для случая ударного сжатия гиперзвукового потока.

Можно доказать, что в общем случае обтекания гиперзвуковым потоком тонкого тела (относительная толщина которого равна \bar{c}) под малым углом атаки α отношение \bar{p}/\bar{c}^2 или \bar{p}/α^2 при изменении \bar{c} , α и M_∞ будет зависеть только от параметров $M_\infty \bar{c}$ и $M_\infty \alpha$. В этом состоит закон гиперзвукового подобия для коэффициента давления. Отсюда могут быть получены соответствующие законы подобия для других аэродинамических коэффициентов. Так, например,

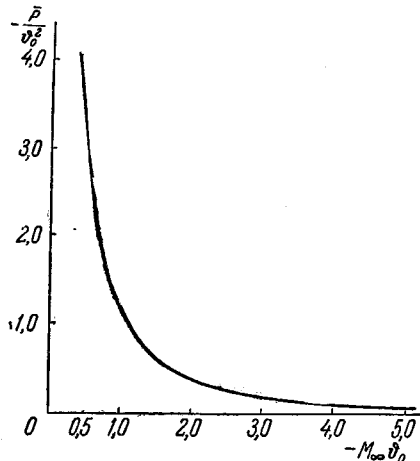


Рис. 5.102. Зависимость \bar{p}/ϑ_0^2 от $M_\infty \vartheta_0$ при адиабатическом расширении гиперзвукового потока.

оказывается, что при обтекании тонких профилей гиперзвуковым потоком имеют место соотношения:

$$\begin{aligned}c_y &= \bar{c}^2 f_1(M_\infty \bar{c}, M_\infty \alpha), \\c_x &= \bar{c}^3 f_2(M_\infty \bar{c}, M_\infty \alpha), \\m_z &= \bar{c}^2 f_3(M_\infty \bar{c}, M_\infty \alpha).\end{aligned}$$

При гиперзвуковых скоростях и небольших значениях числа Рейнольдса *среду нельзя более рассматривать как сплошную*, ибо средняя длина свободного пробега молекулы газа является в этом случае величиной такого же порядка, как характерный размер тела. В самом деле, как известно из гл. I, кинематический коэффициент вязкости газа связан со средней длиной свободного пробега молекул l равенством

$$\nu = 0,499lc,$$

где c есть средняя скорость теплового движения молекул. Если обозначить через L характерный размер тела, то из последнего равенства следует, что отношение l/L , которое называется *числом Кнудсена* и обозначается через K , равно

$$K = \frac{l}{L} = \frac{1}{0,499} \frac{\nu}{cL} \approx 2 \frac{\nu}{VL} \frac{V}{c}.$$

Из кинетической теории газа известно, что

$$c = \sqrt{\frac{8}{\pi k}} a \approx 1,35a \quad (\text{при } k=1,4).$$

Подставляя это выражение в формулу для K , находим:

$$K = 2 \sqrt{\frac{\pi k}{8}} \frac{M_\infty}{R_\infty} \approx 1,5 \frac{M_\infty}{R_\infty}.$$

Если M_∞ и R_∞ — величины одинакового порядка, то l и L также будут величинами одинакового порядка. Такие течения существуют в действительности, например, при полете с большой скоростью на большой высоте; как известно, с возрастанием высоты в атмосфере плотность газа убывает, кинематический коэффициент вязкости увеличивается, число R_∞ уменьшается и может стать величиной такого же порядка, как M_∞ .

Если число K имеет порядок единицы или более высокий, то газ следует рассматривать как состоящий из отдельных, хаотически движущихся молекул. При своем беспорядочном движении молекулы сталкиваются с телом, находящимся в среде, ударяются об его поверхность и отлетают. Наиболее просто можно вычислить аэродинамические силы в этом случае по *ударной теории Ньютона*, сущность которой была вкратце изложена в гл. I.

Если предположить, что при ударе о поверхность тела молекулы газа полностью теряют свою кинетическую энергию, то по теореме импульсов получаем, что лобовое сопротивление тела равно

$$Q = \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S,$$

где S есть площадь миделевого сечения тела (рис. 5.103). Таким

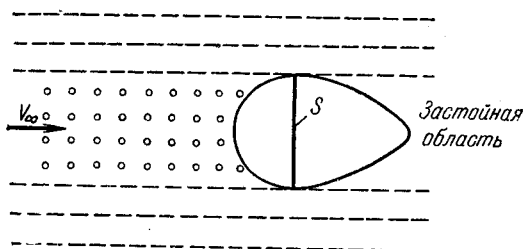


Рис. 5.103. Схема обтекания тела по ударной теории Ньютона.

образом, коэффициент лобового сопротивления, отнесенный к этой площади, оказывается для всех тел при таких условиях равным 2. Подъемная сила при этом равна нулю. Для пластинки, наклоненной к потоку под углом α , площадь которой равна S , лобовое сопротивление получается по этой схеме равным $Q = \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S \sin \alpha$, а нормальная сила — равной $Y_1 = \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S \sin^2 \alpha$.

Если же предположить, что молекулы газа отскакивают от поверхности тела по закону зеркального отражения (рис. 5.104), то аэродинамические силы будут зависеть от формы тела. Для плоской пластинки, площадь которой равна S , а угол атаки равен α , по теореме импульсов получаем: подъемная сила $Y = \rho V_{\infty}^2 S \sin 2\alpha \sin \alpha$, лобовое сопротивление $Q = 2\rho_{\infty} V_{\infty}^2 S \sin^3 \alpha$.

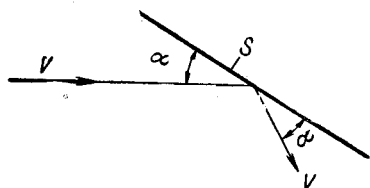


Рис. 5.104. Схема обтекания пластинки при зеркальном отражении молекул газа от ее поверхности.

§ 40. Сила лобового сопротивления при движении тела в идеальной жидкости. Присоединенная масса

Рассмотрим теперь в общем виде вопрос о суммарном силовом воздействии идеальной жидкости на движущееся в ней твердое тело. Как уже указывалось в начале главы, этот вопрос можно решать двояко. Можно определить поле скоростей, затем распределение давлений по поверхности движущегося в жидкости тела и, наконец, суммированием нагрузок, происходящих от этих давлений, вычислить результирующие силы. Можно, однако, непосредственно вычислить результирующие