Если предположить, что при ударе о поверхность тела молекулы газа полностью теряют свою кинетическую энергию, то по теореме импульсов получаем, что лобовое сопротивление тела равно

$$Q = \rho_\infty V_\infty^2 S,$$

где S есть площадь миделевого сечения тела (рис. 5.103). Таким

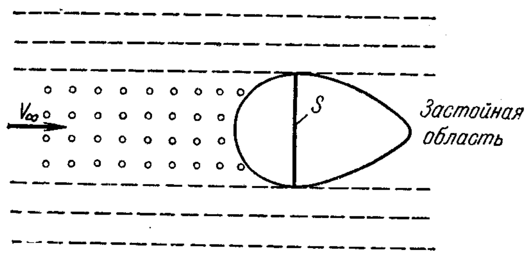

Рис. 5.103. Схема обтекания тела по ударной теории Ньютона.

образом, коэффициент лобового сопротивления, отнесенный к этой площади, оказывается для всех тел при таких условиях равным 2. Подъемная сила при этом равна нулю. Для пластинки, наклоненной к потоку под углом α, площадь которой равна S, лобовое сопротивление получается по этой схеме равным $Q = \rho_\infty V_\infty^2 S \sin\alpha$, а нормальная сила — равной $Y_1 = \rho_\infty V_\infty^2 S \sin^2\alpha$.

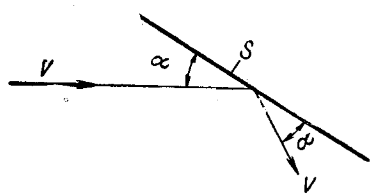

Рис. 5.104. Схема обтекания пластинки при зеркальном отражении молекул газа от ее поверхности.

Если же предположить, что молекулы газа отскакивают от поверхности тела по закону зеркального отражения (рис. 5.104), то аэродинамические силы будут зависеть от формы тела. Для плоской пластинки, площадь которой равна S, а угол атаки равен α, по теореме импульсов получаем: подъемная сила $Y = \rho V_\infty^2 S \sin 2\alpha \sin\alpha$, лобовое сопротивление $Q = 2\rho_\infty V_\infty^2 S \sin^3\alpha$.

§ 40. Сила лобового сопротивления при движении тела в идеальной жидкости. Присоединенная масса

Рассмотрим теперь в общем виде вопрос о суммарном силовом воздействии идеальной жидкости на движущееся в ней твердое тело. Как уже указывалось в начале главы, этот вопрос можно решать двояко. Можно определить поле скоростей, затем распределение давлений по поверхности движущегося в жидкости тела и, наконец, суммированием нагрузок, происходящих от этих давлений, вычислить результирующие силы. Можно, однако, непосредственно вычислить результирующие аэродинамические силы и моменты с помощью метода конечных объемов. Для этого следует применить к массе жидкости, внутри которой находится тело, теорему импульсов или теорему об изменении кинетической энергии.

В этом параграфе мы продемонстрируем применение теоремы об изменении кинетической энергии. Эта теорема, как известно из общей механики, гласит, что изменение кинетической энергии системы за какой-либо промежуток времени равно работе приложенных к системе внешних и внутренних сил за тот же промежуток времени. Представим себе, что тело движется поступательно со скоростью V в покоящейся (на бесконечности) среде. Перемещаясь, тело приводит в движение частицы жидкости, и они приобретают кинетическую энергию. Обозначим кинетическую энергию всей среды, возникающую при движении в ней тела, через T, а ее изменение за время dt — через dT. Силу сопротивления среды движению тела обозначим через $\boldsymbol{R}$; на жидкость будет действовать при движении тела сила, равная $-\boldsymbol{R}$ (реакция тела).

При перемещении тела на величину пути, равную ds, приложенная к жидкости сила $-\boldsymbol{R}$ совершит работу $-R_s ds$. Теорема живых сил запишется применительно к жидкой среде следующим образом:

$$dT = -R_s ds.$$

Отсюда находим величину проекции силы сопротивления среды $\boldsymbol{R}$ на направление движения s:

$$R_s = -\frac{dT}{ds} = -\frac{dT}{dt}\frac{dt}{ds} = -\frac{dT}{dt}\frac{1}{V}.$$

Проекция силы сопротивления на направление, обратное направлению движения тела, называется, как известно, лобовым сопротивлением и обозначается через Q. Следовательно,

$$Q = -R_s = \frac{1}{V}\frac{dT}{dt}. \tag{5.144}$$

Вопрос об определении лобового сопротивления сводится, таким образом, к вопросу о вычислении кинетической энергии жидкой среды. Займемся поэтому более подробно вычислением кинетической энергии среды при движении в ней тела.

Обозначим через $\boldsymbol{v}_*(x, y, z)$ вектор скорости, которую имеет частица жидкости, находящаяся в точке (x, y, z). Эту скорость не следует смешивать с той, которую мы рассматривали ранее, изучая обтекание покоящегося тела средой; эта скорость отличается от той на постоянное для всех точек слагаемое, равное скорости самого тела.

Выделим при точке (x, y, z) частицу жидкости в форме прямоугольного параллелепипеда с ребрами dx, dy, dz; масса этой частицы будет $\rho\,dx\,dy\,dz$, а ее кинетическая энергия $\frac{\rho v_*^2\,dx\,dy\,dz}{2}$. Если просуммировать кинетическую энергию всех частиц жидкости, то получим кинетическую энергию T, которую имеет жидкая среда при движении в ней твердого тела:

$$T = \frac{1}{2} \iiint\limits_{(W)} \rho v_*^2 \, dx \, dy \, dz. \tag{5.145}$$

Интегрирование распространяется здесь на все пространство W, занятое жидкой средой.

Происхождение кинетической энергии среды в случае движения тела с постоянной скоростью можно объяснить себе, лишь обратившись к начальному периоду движения. Для того чтобы *в любой среде* развить скорость от нуля до V, тело должно затратить энергию на приведение в движение частиц среды.

Ограничимся теперь рассмотрением несжимаемой жидкости (и газа при таких скоростях движения, при которых его можно считать несжимаемым). Формулу (5.145) тогда можно написать в виде

$$T = \frac{\rho}{2} \iiint\limits_{(W)} v_*^2 dx \, dy \, dz = \frac{\rho V^2}{2} \iiint\limits_{(W)} \frac{v_*^2}{V^2} \, dx \, dy \, dz.$$

Подынтегральное выражение v_*^2/V^2 есть величина безразмерная, и следовательно, интеграл здесь имеет размерность объема. Введем для этого интеграла обозначение

$$K = \iiint\limits_{(W)} \frac{v_*^2}{V^2} \, dx \, dy \, dz. \tag{5.146}$$

Тогда можно написать, что

$$T = \frac{K \rho V^2}{2}. \tag{5.147}$$

Смысл такой записи заключается в том, что теперь выражению для кинетической энергии среды придан вид, обычный для выражения кинетической энергии поступательно движущегося твердого тела. В самом деле, K есть некоторый объем, $K\rho$ — масса среды, взятой в этом объеме, а $K\rho V^2/2$ — кинетическая энергия этой массы, которую она имела бы в случае, если бы двигалась с той же скоростью, что и тело в среде, т. е. со скоростью V. Кинетическая энергия беспредельной среды, вызванная движением в среде тела, представлена, таким образом, в виде кинетической энергии некоторой, как бы сосредоточенной массы жидкости, все частицы которой движутся с одинаковой скоростью, с той же, которую имеет движущееся тело. Можно, иными словами, при вычислении кинетической энергии представить себе движение частиц жидкости замененным движением некоторой *фиктивной массы жидкости, все частицы которой движутся с той же скоростью, что и тело.* Эта фиктивная масса, определяемая равенством (5.147), называется *присоединенной массой жидкости* для данного тела при движении в данном направлении, а величина K — *объемом присоединенной массы.*

Величину присоединенной массы обычно характеризуют безразмерной величиной, равной отношению объема присоединенной массы к объему тела. Эта безразмерная величина называется коэффициентом присоединенной массы и обозначается через k:

$$k = \frac{K}{W_1},$$

где W_1 есть объем движущегося тела.

Все изложенное до сих пор в этом параграфе относится как к вязкой жидкости, так и к идеальной. Отметим теперь важную особенность, присущую присоединенной массе при движении тела в идеальной жидкости.

Представим себе для простоты, что тело движется в идеальной несжимаемой жидкости прямолинейно и система координат неподвижно с ним связана. Предположим, что движение жидкости, вызванное телом, потенциально и потенциал скоростей есть однозначная функция координат. Граничные условия (на поверхности тела и в бесконечности) и условие однозначности потенциала скоростей полностью определяют потенциал, а следовательно, и поле скоростей, т. е. определяют $\boldsymbol{v}_*$ как функцию координат и времени. Величина v_* должна быть при этом в каждой точке пропорциональна скорости движения тела V. В самом деле, при изменении V граничные условия и уравнение Лапласа для потенциала скоростей будут удовлетворены, если потенциал скоростей изменится пропорционально V; но тогда v_* также изменится во всех точках пропорционально V. Отношение v_*/V представляет собой в этом случае функцию только координат и не зависит ни от скорости движения тела, ни от времени (так как в системе координат, связанной с телом, граничные условия не зависят от времени). Отсюда следует, что при указанных предположениях объем присоединенной массы K не зависит ни от времени, ни от скорости движения тела и есть величина постоянная для данного тела при движении в данном направлении.

В случае движения тела в вязкой жидкости отношение v_*/V, а следовательно, и объем присоединенной массы зависят от времени, которое протекло с момента начала движения, так как с течением времени все дальше от тела распространяется область частиц, увлеченных за телом действием сил вязкости.

В случае движения тела в газе отношение v_*/V и распределение плотности газа зависят от числа M_∞ или, в данной среде, от скорости.

Вернемся теперь к вычислению лобового сопротивления тела. Подставляя в формулу (5.144) вместо кинетической энергии среды T ее выражение (5.147) и принимая во внимание, что в случае потенциального движения в идеальной несжимаемой жидкости K есть величина постоянная для данного тела при движении в данном направлении, мы получим для Q следующее выражение:

$$Q = K\rho \frac{dV}{dt}. \tag{5.148}$$

Таким образом, *лобовое сопротивление в идеальной несжимаемой жидкости при потенциальном движении с однозначным потенциалом равно произведению присоединенной массы тела на его ускорение.* Если тело движется замедленно, т. е. dV/dt есть величина, отрицательная по знаку, то Q будет также отрицательным; воздействие среды на тело приводится в этом случае к некоторой тяге.

Последняя формула вскрывает происхождение силы лобового сопротивления при движении тела в идеальной, несжимаемой жидкости, когда течение, вызванное телом, имеет однозначный потенциал. Сила лобового сопротивления в этих условиях происходит *от инерции частиц среды*, которым тело при своем движении должно сообщать ускорения; она является поэтому силой инерционной природы.

Из формулы (5.148) следует, что если, например, для прямолинейного движения тела в пустоте с положительным ускорением $d\boldsymbol{V}/dt$ к нему необходимо приложить силу $\boldsymbol{F} = m\,d\boldsymbol{V}/dt$, где m есть масса тела, то для движения того же тела с тем же ускорением $d\boldsymbol{V}/dt$, при указанных условиях в идеальной жидкости, сила $\boldsymbol{F}$ не будет достаточной. Для приведения в движение тела и частиц среды необходимо приложить к нему бóльшую силу, нежели $\boldsymbol{F}$, а именно силу $\boldsymbol{F}_1$, определяемую из уравнения движения: $m\,d\boldsymbol{V}/dt = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{R}$, где $\boldsymbol{R}$ есть сила сопротивления среды. Так как $m\,d\boldsymbol{V}/dt$ в обоих случаях одинаково, то $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{R}$, откуда следует:

$$\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{R},$$

или в проекции на направление движения:

$$F_1 = F - R_s = m\frac{dV}{dt} + K\rho\frac{dV}{dt} = (m + K\rho)\frac{dV}{dt}.$$

Воздействие идеальной среды на движущееся тело выражается в данном случае в том, что масса тела как бы увеличивается на величину присоединенной массы. Можно, таким образом, дать второе определение присоединенной массы как *кажущегося увеличения массы тела при его ускоренном движении в среде.* Роль присоединенной массы при исследовании ускоренного движения тела в среде заключается, как видно из этого определения, в том, что можно рассматривать движение тела как происходящее в пустоте, увеличив предварительно его массу на величину присоединенной массы. Понятно отсюда, какое значение имеет присоединенная масса при исследовании неустановившегося движения тела в среде.

Из формулы (5.148) также следует, что если тело движется при указанных условиях в идеальной несжимаемой жидкости с постоянной во времени скоростью, то его лобовое сопротивление равно нулю. Этот вывод называется *парадоксом Даламбера* (1744); парадоксальность здесь заключается в несоответствии этого теоретического результата и наблюдаемого в действительности лобового сопротивления при движении с постоянной скоростью. Парадокс Даламбера объясняется тем, что при решении вопроса о сопротивлении мы исходили из гипотезы о потенциальном движении идеальной жидкости, что не соответствует действительности. Поэтому и результат получился неполный: мы нашли только величину части лобового сопротивления, происходящей от ускорения.

§ 41. Вычисление кинетической энергии среды и объема присоединенной массы при потенциальном движении в среде

Займемся вопросом о практическом вычислении кинетической энергии среды и присоединенной массы при потенциальном движении идеальной несжимаемой жидкости. Формула (5.145), в которой дана запись общего выражения для кинетической энергии, малопригодна для практического ее вычисления. Следует поэтому преобразовать эту формулу к более удобному виду.

Введем в формулу (5.145) вместо скорости v_* ее составляющие по осям координат. Между v_* и этими составляющими имеем соотношение

$$v_*^2 = v_{*x}^2 + v_{*y}^2 + v_{*z}^2.$$

Если поток, вызванный движением тела, безвихревой, то существует потенциальная функция, которую мы обозначим через $\varphi_*(x, y, z)$, и проекции скорости выражаются через нее в виде производных по соответствующим координатам. В этом случае выражение для v_*^2 примет вид

$$v_*^2 = \left(\frac{\partial\varphi_*}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_*}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_*}{\partial z}\right)^2. \tag{5.149}$$

Значок $*$ в обозначении потенциала здесь должен напоминать о том, что эта потенциальная функция относится к движению среды, вызванному движением тела, причем среда на бесконечности находится в покое.

Мы обращаем внимание читателя на то, что *при вычислении кинетической энергии среды нельзя обращать движение* даже в том случае, если оно происходит с постоянной скоростью.

В самом деле, кинетическая энергия при движении безграничной среды, обтекающей неподвижное тело, очевидно, бесконечно большая, тогда как кинетическая энергия, вызванная движением тела в покоящейся среде, вообще говоря, имеет конечную величину. Поэтому мы везде при вычислении кинетической энергии будем рассматривать лишь величины, относящиеся к необращенному движению.

Потенциал скоростей для этого движения φ_* легко определить, если известен потенциал скоростей для обращенного движения φ. Для того чтобы от движения тела в среде перейти к обтеканию тела средой, необходимо, как мы знаем, представить себе, что всем частицам тела и среды сообщены скорости V, равные и противоположно направленные скорости тела. Придание частицам среды постоянной скорости эквивалентно наложению на поток с потенциалом φ_* поступательного потока. Если тело в среде движется параллельно оси x справа налево, то для того, чтобы перейти к обращенному движению, нужно наложить поступательный поток, направленный слева направо, потенциал которого равен Vx. Таким образом, получаем простое соотношение между потенциалами φ_* и φ:

$$\varphi = \varphi_* + Vx,$$

откуда

$$\varphi_* = \varphi - Vx. \tag{5.150}$$