тем, что при решении вопроса о сопротивлении мы исходили из гипотезы о потенциальном движении идеальной жидкости, что не соответствует действительности. Поэтому и результат получился неполный: мы нашли только величину части лобового сопротивления, происходящей от ускорения.

§ 41. Вычисление кинетической энергии среды и объема присоединенной массы при потенциальном движении в среде

Займемся вопросом о практическом вычислении кинетической энергии среды и присоединенной массы при потенциальном движении идеальной несжимаемой жидкости. Формула (5.145), в которой дана запись общего выражения для кинетической энергии, малопригодна для практического ее вычисления. Следует поэтому преобразовать эту формулу к более удобному виду.

Введем в формулу (5.145) вместо скорости v_* ее составляющие по осям координат. Между v_* и этими составляющими имеем соотношение

$$v_*^2 = v_{*x}^2 + v_{*y}^2 + v_{*z}^2.$$

Если поток, вызванный движением тела, безвихревой, то существует потенциальная функция, которую мы обозначим через $\varphi_*(x, y, z)$, и проекции скорости выражаются через нее в виде производных по соответствующим координатам. В этом случае выражение для v_*^2 примет вид

$$v_*^2 = \left(\frac{\partial \varphi_*}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_*}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_*}{\partial z}\right)^2. \qquad (5.149)$$

Значок $*$ в обозначении потенциала здесь должен напоминать о том, что эта потенциальная функция относится к движению среды, вызванному движением тела, причем среда на бесконечности находится в покое.

Мы обращаем внимание читателя на то, что *при вычислении кинетической энергии среды нельзя обращать движение* даже в том случае, если оно происходит с постоянной скоростью.

В самом деле, кинетическая энергия при движении безграничной среды, обтекающей неподвижное тело, очевидно, бесконечно большая, тогда как кинетическая энергия, вызванная движением тела в покоящейся среде, вообще говоря, имеет конечную величину. Поэтому мы везде при вычислении кинетической энергии будем рассматривать лишь величины, относящиеся к необращенному движению.

Потенциал скоростей для этого движения φ_* легко определить, если известен потенциал скоростей для обращенного движения φ. Для того чтобы от движения тела в среде перейти к обтеканию тела средой, необходимо, как мы знаем, представить себе, что всем частицам тела и среды сообщены скорости V, равные и противоположно направленные скорости тела. Придание частицам среды постоянной скорости эквивалентно наложению на поток с потенциалом φ_* поступательного потока. Если тело в среде движется параллельно оси x справа налево, то для того, чтобы перейти к обращенному движению, нужно наложить поступательный поток, направленный слева направо, потенциал которого равен Vx. Таким образом, получаем простое соотношение между потенциалами φ_* и φ:

$$\varphi = \varphi_* + Vx,$$

откуда

$$\varphi_* = \varphi - Vx. \qquad (5.150)$$

Вернемся теперь к вычислению кинетической энергии; формула (5.145) после внесения в нее вместо v_*^2 его выражения (5.149) примет вид

$$T=\frac{\rho}{2}\iiint\limits_{(W)}\left[\left(\frac{\partial\varphi_*}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_*}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_*}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz. \qquad (5.151)$$

Этот тройной интеграл, распространенный на все внешнее к обтекаемому телу пространство и поэтому неудобный для вычисления, мы преобразуем теперь в двойной интеграл, распространенный на поверхность обтекаемого тела. Для этого воспользуемся теоремой Остроградского о преобразовании тройного интеграла в интеграл, распространенный по поверхности.

Пусть имеем поле вектора $\boldsymbol{a}$, занимающее все пространство W, внешнее по отношению к некоторой замкнутой поверхности S. Предположим, что в бесконечности вектор $\boldsymbol{a}=0$. Тогда по теореме Остроградского имеем:

$$\int\limits_{(W)}\operatorname{div}\boldsymbol{a}\,dW=-\int\limits_{(S)}a_n dS, \qquad (5.152)$$

или в прямоугольной системе координат

$$\iiint\limits_{(W)}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=-\int\limits_{(S)}a_n dS, \qquad (5.153)$$

где n есть нормаль к поверхности S, внешняя по отношению к объему, заключенному внутри S.

Приведем теперь подынтегральное выражение в формуле (5.151) к виду, который имеет подынтегральное выражение в левой части формулы Остроградского (5.153). С этой целью воспользуемся следующими тождествами:

$$\left(\frac{\partial\varphi_*}{\partial x}\right)^2=\frac{\partial\left(\varphi_*\frac{\partial\varphi_*}{\partial x}\right)}{\partial x}-\varphi_*\frac{\partial^2\varphi_*}{\partial x^2},$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_*}{\partial y}\right)^2=\frac{\partial\left(\varphi_*\frac{\partial\varphi_*}{\partial y}\right)}{\partial y}-\varphi_*\frac{\partial^2\varphi_*}{\partial y^2},$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_*}{\partial z}\right)^2=\frac{\partial\left(\varphi_*\frac{\partial\varphi_*}{\partial z}\right)}{\partial z}-\varphi_*\frac{\partial^2\varphi_*}{\partial z^2};$$

они легко проверяются, если выполнить дифференцирования, указанные в первых членах правых частей. Складывая эти тождества почленно, получим:

$$\left(\frac{\partial\varphi_*}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_*}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_*}{\partial z}\right)^2=$$
$$=\frac{\partial\left(\varphi_*\frac{\partial\varphi_*}{\partial x}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\varphi_*\frac{\partial\varphi_*}{\partial y}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\varphi_*\frac{\partial\varphi_*}{\partial z}\right)}{\partial z}-\varphi_*\left(\frac{\partial^2\varphi_*}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_*}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi_*}{\partial z^2}\right).$$

Сумма последних трех членов, заключенных в скобки, для несжимаемой жидкости равна нулю вследствие уравнения неразрывности. Таким образом, если мы подставим в интеграл (5.151), выражающий кинетическую энергию, вместо суммы квадратов частных производных найденное для них выражение, то получим:

$$T=\frac{\rho}{2}\iiint\limits_{(W)}\left[\frac{\partial\left(\varphi_*\frac{\partial\varphi_*}{\partial x}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\varphi_*\frac{\partial\varphi_*}{\partial y}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\varphi_*\frac{\partial\varphi_*}{\partial z}\right)}{\partial z}\right]dx\,dy\,dz.$$

Теперь выражение для кинетической энергии приняло тот вид, который требуется теоремой Остроградского. В данном случае

$$a_x=\varphi_*\frac{\partial\varphi_*}{\partial x},\qquad a_y=\varphi_*\frac{\partial\varphi_*}{\partial y},\qquad a_z=\varphi_*\frac{\partial\varphi_*}{\partial z},$$

или в векторной записи

$$\boldsymbol{a}=\varphi_*\operatorname{grad}\varphi_*.$$

Следовательно, в данном случае

$$a_n=\varphi_*\frac{\partial\varphi_*}{\partial n},$$

и в результате, применяя теорему Остроградского[1]), получаем:

$$T=-\frac{\rho}{2}\int\limits_{(S)}\varphi_*\frac{\partial\varphi_*}{\partial n}\,dS. \tag{5.154}$$

Здесь интегрирование распространяется на поверхность движущегося в жидкости тела.

Из формулы (5.154) сразу получается выражение для объема присоединенной массы. Введем так называемый единичный потенциал, т. е. потенциал скоростей для случая, когда тело движется в данном направлении со скоростью, равной единице; обозначим его через φ_1^*. Потенциал скоростей в случае движения в том же направлении со скоростью V по доказанному в предыдущем параграфе будет равен

$$\varphi^*=V\varphi_1^*$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial\varphi^*}{\partial n}=V\frac{\partial\varphi_1^*}{\partial n}.$$

Кинетическая энергия (5.154) выразится через единичный потенциал следующим образом:

$$T=-\frac{\rho V^2}{2}\int\limits_{(S)}\varphi_1^*\frac{\partial\varphi_1^*}{\partial n}\,dS. \tag{5.155}$$

Отсюда видно, что объем присоединенной массы равен

$$K=-\int\limits_{(S)}\varphi_1^*\frac{\partial\varphi_1^*}{\partial n}\,dS. \tag{5.156}$$

Формулы (5.154) и (5.156) применяются при практическом вычислении кинетической энергии среды и объема присоединенной массы. Проиллюстрируем формулы на примерах.

---

[1]) Так как в данном случае $\boldsymbol{v}_*$ означает скорость потока, вызванного движением тела в покоящейся среде, то в бесконечности $v_*=0$; следовательно, в бесконечности $\operatorname{grad}\varphi_*=0$; поэтому вектор $\boldsymbol{a}$ также будет равен нулю в бесконечности, как это и требуется по условию теоремы Остроградского.

Пример 1. Вычислим кинетическую энергию и коэффициент присоединенной массы для случая движения кругового цилиндра перпендикулярно к образующим.

Так как поток вокруг бесконечно длинного цилиндра, движущегося перпендикулярно к своей оси — плоский, то достаточно рассмотреть кинетическую энергию слоя жидкости, заключенной между двумя плоскостями, параллельными плоскости движения, расстояние между которыми равно единице.

Поверхностный интеграл (5.154) в данном случае сводится к контурному интегралу, взятому вдоль контура (L) поперечного сечения цилиндра, так что кинетическая энергия жидкости, находящейся в упомянутом слое, равна

$$T = -\frac{\rho}{2}\oint\limits_{(L)} \varphi^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial n}\, d\sigma, \tag{5.157}$$

где $d\sigma$ есть элемент дуги поперечного сечения.

Значения потенциала φ^* и его нормальной производной $\partial\varphi^*/\partial n$ на контуре поперечного сечения легко найти, зная потенциал φ для потока, обтекающего круговой цилиндр перпендикулярно к образующим. Вспомнив формулу для φ из гл. IV и воспользовавшись равенством (5.150), получим:

$$\varphi^* = \varphi - Vx = Vr\cos\theta\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) - Vr\cos\theta = V\frac{r_0^2}{r}\cos\theta,$$

где r_0 есть радиус цилиндра, r и θ — полярные координаты точки в потоке. На контуре поперечного сечения цилиндра, т. е. при $r = r_0$, значение φ^* равно

$$\varphi^* = Vr_0\cos\theta.$$

Из того же равенства (5.150) следует:

$$\frac{\partial\varphi^*}{\partial n} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} - V\frac{\partial x}{\partial n}.$$

Так как на контуре поперечного сечения $\partial\varphi/\partial n$ равно нулю, то для значений $\partial\varphi^*/\partial n$ на контуре получаем равенство

$$\frac{\partial\varphi^*}{\partial n} = -V\frac{\partial x}{\partial n}.$$

В данном случае, т. е. когда контур поперечного сечения — круг, $n = r$, и так как $x = r\cos\theta$, то $\dfrac{\partial x}{\partial n} = \cos\theta$; следовательно,

$$\frac{\partial\varphi^*}{\partial n} = -V\cos\theta.$$

Теперь, имея значения φ^* и $\partial\varphi^*/\partial n$, можно вычислить кинетическую энергию; формула (5.154) принимает вид

$$T = \frac{\rho}{2}\oint\limits_{(L)} Vr_0\cos\theta\cdot V\cos\theta\, d\sigma,$$

или, так как $d\sigma = r_0 d\theta$, то

$$T = \frac{\rho V^2}{2} r_0^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{\rho V^2}{2} r_0^2 \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta =$$

$$= \frac{\rho V^2}{2} r_0^2 \left(\frac{1}{2}\theta\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\sin 2\theta\Big|_0^{2\pi}\right) = \frac{\pi r_0^2 \rho V^2}{2}.$$

Отсюда видно, что объем K присоединенной массы жидкости в случае движения кругового цилиндра перпендикулярно к оси равен

$$K = 1 \cdot \pi r_0^2,$$

т. е. равен объему вытесненной цилиндром жидкости; поэтому коэффициент присоединенной массы в данном случае равен единице:

$$k = 1.$$

Пример 2. Вычислим кинетическую энергию и коэффициент присоединенной массы для случая шара, движущегося в жидкости. Потенциал скоростей потока, обтекающего неподвижный шар, выражается, как известно из кинематики жидкости, следующей формулой:

$$\varphi = V\tilde{\rho}\cos\vartheta\left(1 + \frac{\tilde{\rho}_0^3}{2\tilde{\rho}^3}\right),$$

где $\tilde{\rho}_0$ есть радиус шара, $\tilde{\rho}$, ϑ — полярные координаты. Из этой формулы, полагая в ней $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0$, получаем значения потенциала на поверхности шара

$$\varphi = \frac{3}{2} V\tilde{\rho}_0 \cos\vartheta.$$

Потенциал скоростей для случая, когда шар движется в покоящейся жидкости, имеет на поверхности шара значение

$$\varphi^* = \varphi - Vx = \frac{3}{2} V\tilde{\rho}_0\cos\vartheta - V\tilde{\rho}_0\cos\vartheta = \frac{1}{2} V\tilde{\rho}_0\cos\vartheta.$$

Для значения $\partial\varphi^*/\partial n$ на поверхности шара получаем, так же как и в предыдущем примере, выражение

$$\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial n}\right)_{\tilde{\rho}=\tilde{\rho}_0} = -V\frac{\partial x}{\partial n} = -V\cos\vartheta.$$

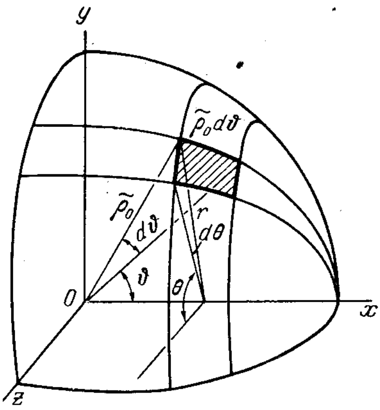

Рис. 5.105. К вычислению кинетической энергии для шара.

Для того чтобы вычислить интеграл (5.154), необходимо найти выражение элемента поверхности шара dS в полярных координатах $\tilde{\rho}$, θ, ϑ. Этот элемент выделяется обычным образом: координатам θ и ϑ точки на поверхности шара даются приращения $d\theta$ и $d\vartheta$. Затем проводятся дуги $\tilde{\rho}_0\,d\vartheta$ — в меридиональной плоскости и $r\,d\theta$ — в плоскости поперечного сечения и на них строится элемент, как показано на рис. 5.105. Площадь этого элемента равна

$$dS = r\tilde{\rho}_0\,d\vartheta\,d\theta,$$

или так как

$$r = \tilde{\rho}_0 \sin\vartheta,$$

то

$$dS = \tilde{\rho}_0^2 \sin\vartheta\,d\vartheta\,d\theta.$$

Подставляя найденные значения φ^*, $\partial\varphi^*/\partial n$ и dS в формулу (5.154), вычисляем кинетическую энергию жидкости:

$$T = -\frac{\rho}{2}\iint\limits_{(S)} \varphi^*\frac{\partial\varphi^*}{\partial n}\,dS = -\frac{\rho}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \frac{1}{2} V\tilde{\rho}_0\cos\vartheta\,(-V\cos\vartheta)\,\tilde{\rho}_0^2\sin\vartheta\,d\vartheta =$$

$$= \frac{\pi\tilde{\rho}_0^3\rho V^2}{2}\int_0^{\pi}\cos^2\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta = -\frac{\pi\tilde{\rho}_0^3\rho V^2}{2}\,\frac{\cos^3\vartheta}{3}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi\tilde{\rho}_0^3\,\frac{\rho V^2}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{4}{3}\,\pi\tilde{\rho}_0^3\,\frac{\rho V^2}{2}.$$

Отсюда следует, что объем присоединенной массы для шара радиуса $\tilde{\rho}_0$ равен

$$K=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\tilde{\rho}_0^3,$$

т. е. равен половине объема вытесненной шаром жидкости; поэтому коэффициент присоединенной массы для шара равен

$$k=\frac{1}{2}.$$

Ввиду симметрии шара этот коэффициент будет иметь одно и то же значение при движении во всех направлениях.

§ 42. Аэродинамический момент при потенциальном обтекании тела идеальной жидкостью. Главные направления движения

Нормальные напряжения, распределенные по поверхности тела, движущегося в идеальной жидкости, приводятся в общем случае к результирующей силе и результирующей паре сил. Мы займемся теперь определением момента этой пары; так же как и при вычислении лобового сопротивления в идеальной жидкости, наиболее простым и быстро ведущим к цели способом является здесь применение теоремы об изменении кинетической энергии среды.

Рассмотрим сначала *поступательное движение тела с постоянной скоростью.* Представим себе два случая движения в идеальной среде одного и того же тела, с одной и той же скоростью, но в несколько разных направлениях; пусть, например, угол между направлением вектора скорости и какой-либо осью, жестко связанной с телом, будет в одном случае α, а в другом $-\alpha+\delta\alpha$. Кинетические энергии среды в этих двух случаях движения будут, вообще говоря, разные, так как при изменении направления движения изменяется и поле скоростей окружающей среды. Обозначим разность кинетических энергий для этих двух случаев движения через δT. Можно, теоретически говоря, перейти от одного случая движения к другому, повернув тело на угол $\delta\alpha$. В случае идеальной несжимаемой жидкости и потенциального течения работа, которая при этом будет затрачена, вызовет изменение кинетической энергии среды, равное δT. Так как сила сопротивления здесь равна нулю, то выполнить эту работу может лишь некоторая пара сил. Обозначим величину момента этой пары через M; тогда работа, которую пара выполняет, поворачивая тело на угол $\delta\alpha$, будет $M\delta\alpha$. Мы можем теперь написать, что

$$M\delta\alpha=\delta T.$$

Отсюда получаем весьма простое соотношение между моментом действующей на тело пары и кинетической энергией среды

$$M=\frac{dT}{d\alpha}. \tag{5.158}$$

Этот момент направлен по оси, перпендикулярной к предельному