Отсюда следует, что объем присоединенной массы для шара радиуса $\tilde{\rho}_0$ равен

$$K=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\tilde{\rho}_0^3,$$

т. е. равен половине объема вытесненной шаром жидкости; поэтому коэффициент присоединенной массы для шара равен

$$k=\frac{1}{2}.$$

Ввиду симметрии шара этот коэффициент будет иметь одно и то же значение при движении во всех направлениях.

§ 42. Аэродинамический момент при потенциальном обтекании тела идеальной жидкостью. Главные направления движения

Нормальные напряжения, распределенные по поверхности тела, движущегося в идеальной жидкости, приводятся в общем случае к результирующей силе и результирующей паре сил. Мы займемся теперь определением момента этой пары; так же как и при вычислении лобового сопротивления в идеальной жидкости, наиболее простым и быстро ведущим к цели способом является здесь применение теоремы об изменении кинетической энергии среды.

Рассмотрим сначала *поступательное движение тела с постоянной скоростью*. Представим себе два случая движения в идеальной среде одного и того же тела, с одной и той же скоростью, но в несколько разных направлениях; пусть, например, угол между направлением вектора скорости и какой-либо осью, жестко связанной с телом, будет в одном случае α, а в другом $-\alpha+\delta\alpha$. Кинетические энергии среды в этих двух случаях движения будут, вообще говоря, разные, так как при изменении направления движения изменяется и поле скоростей окружающей среды. Обозначим разность кинетических энергий для этих двух случаев движения через δT. Можно, теоретически говоря, перейти от одного случая движения к другому, повернув тело на угол $\delta\alpha$. В случае идеальной несжимаемой жидкости и потенциального течения работа, которая при этом будет затрачена, вызовет изменение кинетической энергии среды, равное δT. Так как сила сопротивления здесь равна нулю, то выполнить эту работу может лишь некоторая пара сил. Обозначим величину момента этой пары через M; тогда работа, которую пара выполняет, поворачивая тело на угол $\delta\alpha$, будет $M\delta\alpha$. Мы можем теперь написать, что

$$M\delta\alpha=\delta T.$$

Отсюда получаем весьма простое соотношение между моментом действующей на тело пары и кинетической энергией среды

$$M=\frac{dT}{d\alpha}. \qquad (5.158)$$

Этот момент направлен по оси, перпендикулярной к предельному (при $\delta\alpha \to 0$) положению плоскости, проходящей через векторы скорости двух рассматриваемых движений тела.

Для того чтобы пользоваться формулой (5.158), необходимо знать кинетическую энергию среды, или, что все равно, присоединенную массу при движении данного тела в разных направлениях. Однако, как будет доказано в этом параграфе, нет надобности вычислять присоединенную массу отдельно для каждого данного направления движения. Оказывается, что присоединенные массы для разных направлений движения одного и того же тела связаны между собою довольно простой зависимостью (аналогичной зависимости между моментами инерции тела относительно различных направлений). Мы докажем, что присоединенную массу тела при его движении в данном направлении можно вычислить, коль скоро известны присоединенные массы того же тела для определенных трех взаимно перпендикулярных направлений движения (так называемых *«главных» направлений*), причем эти направления должны быть особым образом выбраны. Для того чтобы вывести это, нам придется преобразовать предварительно формулу (5.145) для кинетической энергии, введя в нее составляющие скорости движения тела по осям координат.

Предположим, что тело движется со скоростью V в некотором направлении l, составляющем с осями координат x, y, z, которые жестко связаны с телом, углы, соответственно равные α, β, γ. Обозначим составляющие скорости движения тела вдоль осей координат соответственно через u, v, w; тогда

$$u = V\cos\alpha, \qquad v = V\cos\beta, \qquad w = V\cos\gamma. \tag{5.159}$$

Поле скоростей жидкости при движении тела в направлении l со скоростью V можно представить себе как результат наложения скоростных полей, соответствующих трем движениям того же тела: одного — вдоль оси x со скоростью u, другого — вдоль оси y со скоростью v и третьего — вдоль оси z со скоростью w.

Если обозначить скорость в некоторой точке среды (x, y, z), соответствующую движению тела вдоль оси x со скоростью, равной единице, через $\boldsymbol{v}_1^*$, то при движении тела со скоростью u скорость жидкости в той же точке будет $u\boldsymbol{v}_1^*$. Аналогично, если обозначить через $\boldsymbol{v}_2^*$ и $\boldsymbol{v}_3^*$ скорости в точке (x, y, z) при движении тела соответственно вдоль осей y и z с единичной скоростью, то скорости в той же точке при движении тела вдоль осей y и z со скоростями v и w будут соответственно равны $v\boldsymbol{v}_2^*$ и $w\boldsymbol{v}_3^*$. Запишем скорость результирующего движения в той же точке в виде суммы скоростей составляющих движений:

$$\boldsymbol{v}^* = u\boldsymbol{v}_1^* + v\boldsymbol{v}_2^* + w\boldsymbol{v}_3^*.$$

Отсюда следует, что

$$v^{*2} = v_x^{*2} + v_y^{*2} + v_z^{*2} = (uv_{1x}^* + vv_{2x}^* + wv_{3x}^*)^2 + (uv_{1y}^* + vv_{2y}^* + wv_{3y}^*)^2 + (uv_{1z}^* + vv_{2z}^* + wv_{3z}^*)^2.$$

Подставим это выражение в формулу (5.145) для кинетической энергии; тогда получим:

$$T = \frac{\rho}{2}\iiint\limits_{(W)} [u^2v_1^{*2} + v^2v_2^{*2} + w^2v_3^{*2} + 2uv\,(v_{1x}^*v_{2x}^* + v_{1y}^*v_{2y}^* + v_{1z}^*v_{2z}^*)^2 + 2vw\,(v_{2x}^*v_{3x}^* + v_{2y}^*v_{3y}^* + v_{2z}^*v_{3z}^*) + 2uw\,(v_{1x}^*v_{3x}^* + v_{1y}^*v_{3y}^* + v_{1z}^*v_{3z}^*)]\,dx\,dy\,dz.$$

Интегрирование по-прежнему распространяется на все пространство, занимаемое жидкостью. Если обозначить ради краткости письма[1]):

$$\iiint\limits_{(W)} v_1^{*2}\,dx\,dy\,dz = A,\quad \iiint\limits_{(W)} v_2^{*2}dx\,dy\,dz = B,\quad \iiint\limits_{(W)} v_3^{*2}dx\,dy\,dz = C,$$

$$\iiint\limits_{(W)} (v_{1x}^*v_{2x}^* + v_{1y}^*v_{2y}^* + v_{1z}^*v_{2z}^*)\,dx\,dy\,dz = D,$$

$$\iiint\limits_{(W)} (v_{2x}^*v_{3x}^* + v_{2y}^*v_{3y}^* + v_{2z}^*v_{3z}^*)\,dx\,dy\,dz = E,$$

$$\iiint\limits_{(W)} (v_{1x}^*v_{3x}^* + v_{1y}^*v_{3y}^* + v_{1z}^*v_{3z}^*)\,dx\,dy\,dz = F,$$

то выражение для кинетической энергии примет вид

$$T = \frac{\rho}{2}\,(Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2Duv + 2Evw + 2Fuw).$$

Последняя формула написана для произвольной системы координат, связанной с движущимся телом; надлежащим выбором системы координат можно значительно упростить это выражение. Именно можно выбрать оси координат так, чтобы в выражение для кинетической энергии не входили члены, содержащие произведения скоростей, т. е. так, чтобы для этих осей координат коэффициенты D, E и F были равны нулю. Это можно доказать из простых геометрических соображений. Преобразуем предварительно последнюю формулу, разделив обе части ее на T и введя вместо u, v, w их выражения (5.159); тогда получим:

$$1 = \frac{\rho V^2}{2}\left(A\frac{\cos^2\alpha}{T} + B\frac{\cos^2\beta}{T} + C\frac{\cos^2\gamma}{T} + 2D\frac{\cos\alpha\cos\beta}{T} + \right.$$
$$\left. + 2E\frac{\cos\beta\cos\gamma}{T} + 2F\frac{\cos\alpha\cos\gamma}{T}\right),$$

или если вместо кинетической энергии подставить ее выражение через присоединенную массу (5.147), то это равенство примет вид

$$1 = A\frac{\cos^2\alpha}{K} + B\frac{\cos^2\beta}{K} + C\frac{\cos^2\gamma}{K} + 2D\frac{\cos\alpha\cos\beta}{K} +$$
$$+ 2E\frac{\cos\beta\cos\gamma}{K} + 2F\frac{\cos\alpha\cos\gamma}{K}. \tag{5.160}$$

Обозначим теперь:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{K}}\cos\alpha &= x_1,\\ \frac{1}{\sqrt{K}}\cos\beta &= y_1,\\ \frac{1}{\sqrt{K}}\cos\gamma &= z_1. \end{aligned}\right\} \tag{5.161}$$

Величины x_1, y_1, z_1 имеют простой геометрический смысл; как видно из формул, это — координаты конца вектора, отложенного из начала по направлению движения тела l, причем этот вектор имеет длину, равную $1/\sqrt{K}$

---

[1]) Из сопоставления первых трех из этих равенств с формулой (5.146) вытекает, что A, B, C представляют собой объемы присоединенных масс при движении тела со скоростью, равной единице, соответственно вдоль осей координат x, y, z.

(где K — объем присоединенной массы при движении тела в направлении l). Условимся, краткости ради, называть такой вектор вектором присоединенной массы для данного направления. Равенство (5.160) показывает, что координаты конца вектора присоединенной массы не могут быть произвольными: каково бы ни было направление движения, они должны удовлетворять следующему соотношению, которое получается из (5.160), если воспользоваться обозначениями (5.161):

$$Ax_1^2 + By_1^2 + Cz_1^2 + 2Dx_1y_1 + 2Ey_1z_1 + 2Fx_1z_1 = 1. \qquad (5.162)$$

Это есть уравнение поверхности второго порядка, и таким образом, мы установили, что геометрическим местом концов вектора присоединенной массы является некоторая поверхность второго порядка.

Нетрудно обнаружить, что это всегда будет эллипсоид. В самом деле, в каком бы направлении тело ни двигалось, окружающая жидкость имеет не равную нулю кинетическую энергию T (если только не рассматривать случай бесконечно длинного цилиндра, движущегося вдоль своих образующих, и бесконечно тонкой пластинки, движущейся параллельно своей плоскости; в этих случаях $T=0$). Следовательно, для каждого направления движения тела имеется присоединенная масса K, не равная нулю, и значит вектор присоединенной массы, длина которого равна $1/\sqrt{K}$, ни для одного направления движения не равен бесконечности. Отсюда следует, что на нашей поверхности нет бесконечно удаленных точек, а из поверхностей второго порядка этим свойством обладает, как известно, только эллипсоид. Установив это, мы можем упростить уравнение (5.162), взяв за оси координат оси симметрии (главные оси) эллипсоида. Уравнение эллипсоида, отнесенного к этим осям, имеет, как известно, наиболее простой (канонический) вид: оно не содержит членов с произведением координат. Таким образом, в *новой системе координат* x_2, y_2, z_2 мы можем написать уравнение рассматриваемого эллипсоида в виде

$$K_1x_2^2 + K_2y_2^2 + K_3z_2^2 = 1. \qquad (5.163)$$

Здесь K_1, K_2, K_3 имеют выражения, аналогичные выражениям для A, B, C, и являются поэтому объемами присоединенной массы при движении тела вдоль осей симметрии эллипсоида. Этот эллипсоид, поверхность которого является геометрическим местом концов вектора присоединенной массы, называется *эллипсоидом кинетической энергии* для данного тела. Он вполне аналогичен эллипсоиду инерции, который рассматривается в общей механике.

Направления главных осей эллипсоида кинетической энергии называются главными направлениями движения для данного тела. Таким образом, K_1, K_2, K_3 суть объемы присоединенной массы при движении тела по главным направлениям. Из уравнения эллипсоида кинетической энергии (5.163) вытекает простая зависимость, которая позволяет вычислить объем присоединенной массы при движении в любом данном направлении через объемы присоединенных масс при движении по главным направлениям. Эту зависимость можно получить, подставив в уравнение (5.163) вместо x_2, y_2, z_2 их выражения, аналогичные (5.161); в результате будем иметь:

$$K = K_1 \cos^2\alpha + K_2 \cos^2\beta + K_3 \cos^2\gamma.$$

Здесь α, β и γ суть углы, которые составляют данное направление движения с главными направлениями.

Аналогичное соотношение существует и между соответствующими коэффициентами присоединенной массы.

Из последнего равенства легко получить формулу для вычисления кинетической энергии жидкости при движении в данном направлении, если известны объемы K_1, K_2, K_3; для этого нужно умножить равенство на $\rho V^2/2$ и воспользоваться соотношениями (5.159); в результате получим:

$$T = \frac{K_1 \rho u^2}{2} + \frac{K_2 \rho v^2}{2} + \frac{K_3 \rho w^2}{2}. \qquad (5.164)$$

Здесь под u, v, w следует понимать компоненты скорости тела V по главным направлениям движения.

Каждое слагаемое в правой части есть кинетическая энергия жидкости для составляющего движения тела вдоль соответствующего главного направления; можно, таким образом, сказать, что главные направления движения обладают тем свойством, что *кинетическая энергия при поступательном движении тела в любом направлении равна сумме кинетических энергий для составляющих движений вдоль главных направлений.* Из формулы для T (стр. 543) видно, что выражение кинетической энергии через компоненты скорости тела в *любой другой системе координат* (оси которой не совпадают с главными направлениями) этим свойством не обладает.

§ 43. Механические свойства главных направлений движения

Главные направления движения обладают весьма интересными механическими свойствами. Вспомним, что главные направления движения суть оси симметрии (главные оси) эллипсоида кинетической энергии; поэтому вектор присоединенной массы для каждого из этих направлений имеет значение максимальное или минимальное по сравнению с его значениями для иных направлений (рис. 5.106). Следовательно, при движении тела вдоль этих направлений величина присоединенной массы, а вместе с ней и величина кинетической энергии будут также иметь соответственно минимальное или максимальное значения. Поэтому для главных направлений движения производная $dT/d\alpha$, которая входит в формулу (5.158), а значит и момент пары, действующей на тело при движении с постоянной скоростью, равны нулю. Таким образом, для всякого тела, движущегося с постоянной скоростью в идеальной несжимаемой жидкости, существуют три направления, именно главные направления, при движении вдоль которых тело не испытывает действия ни силы сопротивления, ни момента, т. е. находится в равновесии под действием аэродинамических сил. *Главные направления являются единственными направлениями,* для которых $dT/d\alpha = 0$, так что они являются, вообще говоря, единственными направлениями, *двигаясь вдоль которых, тело находится в равновесии под действием аэродинамических сил.*

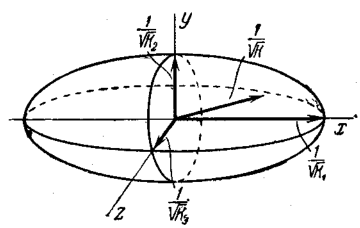

Рис. 5.106. Эллипсоид кинетической энергии. Главные направления движения.

Оказывается, однако, что главные направления неравноценны в смысле устойчивости этого равновесия. Мы рассмотрим здесь устойчивость в узком смысле этого слова. Пусть тело движется в некотором направлении с постоянной скоростью V; представим себе, что в некоторый момент времени на тело подействовала внезапно приложенная возмущающая сила или пара сил, или то и другое, которые изменили *направление движения тела* на малый угол (величина же скорости осталась неизменной), и затем тело было предоставлено самому себе. Напомним, что движение называется устойчивым, если аэродинамические силы и моменты, действующие при этом на тело, таковы, что после полученного телом внезапного изменения направления движения они стремятся вернуть тело к тому направлению движения, которое было до «возмущения». Если же силы и моменты, действующие на