известны объемы K_1, K_2, K_3; для этого нужно умножить равенство на $\rho V^2/2$ и воспользоваться соотношениями (5.159); в результате получим:

$$T = \frac{K_1 \rho u^2}{2} + \frac{K_2 \rho v^2}{2} + \frac{K_3 \rho w^2}{2}. \tag{5.164}$$

Здесь под u, v, w следует понимать компоненты скорости тела V по главным направлениям движения.

Каждое слагаемое в правой части есть кинетическая энергия жидкости для составляющего движения тела вдоль соответствующего главного направления; можно, таким образом, сказать, что главные направления движения обладают тем свойством, что *кинетическая энергия при поступательном движении тела в любом направлении равна сумме кинетических энергий для составляющих движений вдоль главных направлений.* Из формулы для T (стр. 543) видно, что выражение кинетической энергии через компоненты скорости тела в *любой другой системе координат* (оси которой не совпадают с главными направлениями) этим свойством не обладает.

§ 43. Механические свойства главных направлений движения

Главные направления движения обладают весьма интересными механическими свойствами. Вспомним, что главные направления движения суть оси симметрии (главные оси) эллипсоида кинетической энергии; поэтому вектор присоединенной массы для каждого из этих направлений имеет значение максимальное или минимальное по сравнению с его значениями для иных направлений (рис. 5.106). Следовательно, при движении тела вдоль этих направлений величина присоединенной массы, а вместе с ней и величина кинетической энергии будут также иметь соответственно минимальное или максимальное значения. Поэтому для главных направлений движения производная $dT/d\alpha$, которая входит в формулу (5.158), а значит и момент пары, действующей на тело при движении с постоянной скоростью, равны нулю. Таким образом, для всякого тела, движущегося с постоянной скоростью в идеальной несжимаемой жидкости, существуют три направления, именно главные направления, при движении вдоль которых тело не испытывает действия ни силы сопротивления, ни момента, т. е. находится в равновесии под действием аэродинамических сил. *Главные направления являются единственными направлениями,* для которых $dT/d\alpha = 0$, так что они являются, вообще говоря, единственными направлениями, *двигаясь вдоль которых, тело находится в равновесии под действием аэродинамических сил.*

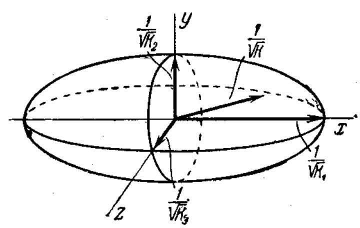

Рис. 5.106. Эллипсоид кинетической энергии. Главные направления движения.

Оказывается, однако, что главные направления неравноценны в смысле устойчивости этого равновесия. Мы рассмотрим здесь устойчивость в узком смысле этого слова. Пусть тело движется в некотором направлении с постоянной скоростью V; представим себе, что в некоторый момент времени на тело подействовала внезапно приложенная возмущающая сила или пара сил, или то и другое, которые изменили *направление движения тела* на малый угол (величина же скорости осталась неизменной), и затем тело было предоставлено самому себе. Напомним, что движение называется устойчивым, если аэродинамические силы и моменты, действующие при этом на тело, таковы, что после полученного телом внезапного изменения направления движения они стремятся вернуть тело к тому направлению движения, которое было до «возмущения». Если же силы и моменты, действующие на тело после его отклонения, таковы, что стремятся увеличить отклонение, полученное телом, от его направления движения, то рассматриваемое движение тела называется неустойчивым.

Можно судить об устойчивости движения, пользуясь формулой (5.158). Рассмотрим, например, движение тела вдоль того из главных направлений, для которого кинетическая энергия среды минимальна ($\alpha = \alpha_1$). Если направление движения тела получит вследствие какой-либо внешней причины отклонение на угол $d\alpha$ от главного направления, то производная будет иметь тот же знак, что и отклонение $d\alpha$, ибо вообще знак производной в окрестности минимума функции совпадает со знаком приращения независимого переменного (рис. 5.107). В силу формулы (5.158) тот же знак, что и отклонение, будет иметь момент пары сил, который возникает при отклонении. Этот момент будет стремиться увеличить отклонение; движение поэтому неустойчиво. Аналогично рассмотрим случай, когда тело движется вдоль того из главных направлений, для которого кинетическая энергия максимальна ($\alpha = \alpha_2$); здесь при отклонении от положения равновесия аэродинамических сил знак $dT/d\alpha$, а значит и знак возникающего при этом момента пары сил, обратен знаку отклонения. Момент будет стремиться уменьшить это отклонение, т. е. вернуть тело к первоначальному направлению движения. Следовательно, движение в данном случае устойчивое.

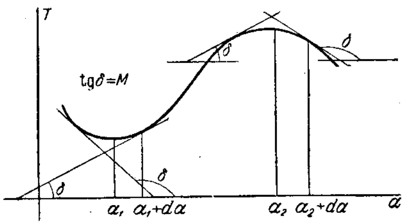

Рис. 5.107. К вопросу об устойчивости движения вдоль главных направлений.

В случае когда эллипсоид кинетической энергии трехосный (т. е. когда движущееся в среде тело имеет меньше, нежели две плоскости симметрии), одно из главных направлений движения таково, что кинетическая энергия при движении вдоль этого направления будет максимальной или минимальной *лишь относительно*. Вектор присоединенной массы для этого направления является малой полуосью для эллипса, который получается в сечении, например, плоскостью xy (рис. 5.108), и одновременно большой полуосью для эллипса, который получается в сечении плоскостью yz. Поэтому, если тело будет получать отклонения от этого направления движения (ось y на рис. 5.108) только в плоскости xy, то возникающие при этом моменты будут стремиться привести тело к исходному направлению движения. Если же тело будет получать отклонения от этого направления только в плоскости yz, то возникающие при этом моменты будут стремиться увеличить отклонение от исходного направления движения. Мы видим, таким образом, что в этом случае движение вдоль главного направления не обладает абсолютной устойчивостью, т. е. устойчивостью при всевозможных отклонениях. Следовательно, движение в этом случае неустойчиво.

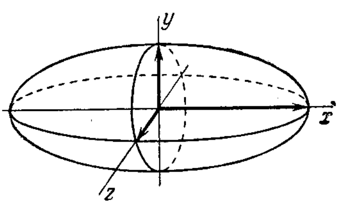

Рис. 5.108. Случай, когда эллипсоид кинетической энергии трехосный.

Полученные результаты можно резюмировать следующим образом: *для всякого тела, движущегося в жидкости, существуют три взаимно перпендикулярные направления (главные направления), при движении вдоль которых аэродинамические силы, приложенные к телу, находятся в равновесии; для одного из этих направлений (которому соответствует максимум кинетической энергии) движение будет устойчивым, для двух других — неустойчивым.*

Если в жидкости движется удобообтекаемое тело вращения, то кинетическая энергия жидкости будет минимальной при движении вдоль оси. Ось вращения тела является, следовательно, одним из главных направлений движения, и эллипсоид кинетической энергии располагается в этом случае так, что его большая ось совпадает с осью вращения тела. Согласно общей теории при движении вдоль этой оси тело должно находиться в равновесии под действием аэродинамических сил. Это равновесие, однако, не является устойчивым: при всяком изменении направления движения момент аэродинамической пары будет стремиться увеличить это изменение и повернуть тело так, чтобы его движение было устойчивым. Для удобообтекаемого тела вращения это будет направление, перпендикулярное к его оси.

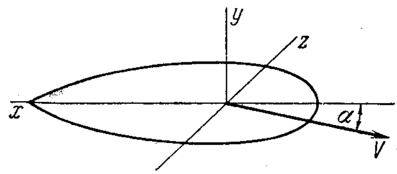

Рис. 5.109. К вычислению момента аэродинамической пары сил.

Вернемся теперь к формуле (5.158) для аэродинамического момента, действующего на тело при потенциальном течении в среде. Имея выражение (5.164) для кинетической энергии среды, можно вычислить и момент. Разумеется, что везде, где используется выражение (5.164) для кинетической энергии, осями координат являются главные направления движения. Пусть тело движется с постоянной скоростью V параллельно одной из координатных плоскостей, например параллельно плоскости xy. Обозначим угол между вектором скорости и продолжением оси x через α; тогда составляющие вектора скорости по осям координат x, y, z будут соответственно равны (рис. 5.109):

$$u = -V\cos\alpha, \qquad v = -V\sin\alpha, \qquad w = 0.$$

Формула (5.157) для кинетической энергии примет в таком случае вид

$$T = \frac{\rho V^2}{2}(K_1\cos^2\alpha + K_2\sin^2\alpha).$$

Из формулы (5.158) вытекает, что на движущееся таким образом тело будет действовать пара сил; момент M_z этой пары равен

$$M_z = \frac{dT}{d\alpha} = \frac{\rho V^2}{2}(-K_1 2\cos\alpha\sin\alpha + K_2 2\cos\alpha\sin\alpha),$$

или после упрощений

$$M_z = \frac{\rho V^2}{2} W(k_2 - k_1)\sin 2\alpha,$$

где W есть объем тела, а k_1 и k_2 — коэффициенты присоединенных масс при движении по соответствующим главным направлениям.

§ 44. Аэродинамический момент при вращательном движении тела. Присоединенный момент инерции

Рассмотрим теперь *вращательное движение тела*. Пусть тело вращается в идеальной несжимаемой жидкости с угловой скоростью Ω. Общая формула для кинетической энергии среды (5.145) может быть в этом случае представлена в виде

$$T = \frac{\rho\Omega^2}{2}\iiint\limits_{(W)}\frac{v_*^2}{\Omega^2}\,dx\,dy\,dz,$$