Если в жидкости движется удобообтекаемое тело вращения, то кинетическая энергия жидкости будет минимальной при движении вдоль оси. Ось вращения тела является, следовательно, одним из главных направлений движения, и эллипсоид кинетической энергии располагается в этом случае так, что его большая ось совпадает с осью вращения тела. Согласно общей теории при движении вдоль этой оси тело должно находиться в равновесии под действием аэродинамических сил. Это равновесие, однако, не является устойчивым: при всяком изменении направления движения момент аэродинамической пары будет стремиться увеличить это изменение и повернуть тело так, чтобы его движение было устойчивым. Для удобообтекаемого тела вращения это будет направление, перпендикулярное к его оси.

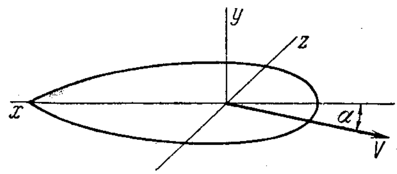

Рис. 5.109. К вычислению момента аэродинамической пары сил.

Вернемся теперь к формуле (5.158) для аэродинамического момента, действующего на тело при потенциальном течении в среде. Имея выражение (5.164) для кинетической энергии среды, можно вычислить и момент. Разумеется, что везде, где используется выражение (5.164) для кинетической энергии, осями координат являются главные направления движения. Пусть тело движется с постоянной скоростью V параллельно одной из координатных плоскостей, например параллельно плоскости xy. Обозначим угол между вектором скорости и продолжением оси x через α; тогда составляющие вектора скорости по осям координат x, y, z будут соответственно равны (рис. 5.109):

$$u = -V\cos\alpha, \qquad v = -V\sin\alpha, \qquad w = 0.$$

Формула (5.157) для кинетической энергии примет в таком случае вид

$$T = \frac{\rho V^2}{2}(K_1\cos^2\alpha + K_2\sin^2\alpha).$$

Из формулы (5.158) вытекает, что на движущееся таким образом тело будет действовать пара сил; момент M_z этой пары равен

$$M_z = \frac{dT}{d\alpha} = \frac{\rho V^2}{2}(-K_1 2\cos\alpha\sin\alpha + K_2 2\cos\alpha\sin\alpha),$$

или после упрощений

$$M_z = \frac{\rho V^2}{2} W(k_2 - k_1)\sin 2\alpha,$$

где W есть объем тела, а k_1 и k_2 — коэффициенты присоединенных масс при движении по соответствующим главным направлениям.

§ 44. Аэродинамический момент при вращательном движении тела. Присоединенный момент инерции

Рассмотрим теперь *вращательное движение тела*. Пусть тело вращается в идеальной несжимаемой жидкости с угловой скоростью Ω. Общая формула для кинетической энергии среды (5.145) может быть в этом случае представлена в виде

$$T = \frac{\rho\Omega^2}{2}\iiint\limits_{(W)}\frac{v_*^2}{\Omega^2}\,dx\,dy\,dz,$$

где W — пространство, занятое жидкостью. Подынтегральная функция имеет размерность $м^5$, произведение $\rho\, dx\, dy\, dz$ есть элементарная жидкая масса, и следовательно, входящее в последнюю формулу выражение

$$J=\rho \iiint\limits_{(W)} \frac{v^{*2}}{\Omega^2}\, dx\, dy\, dz$$

можно рассматривать как момент инерции некоторой жидкой массы относительно оси вращения тела. Формула для кинетической энергии среды при вращательном движении тела принимает, таким образом, вид, какой обычно имеет формула для кинетической энергии вращающегося тела:

$$T=\frac{J\Omega^2}{2}. \tag{5.165}$$

Величина J в этой формуле называется *присоединенным моментом инерции* для данного тела при вращении относительно данной оси. Это понятие вполне аналогично понятию присоединенной массы для случая поступательного движения.

Присоединенный момент инерции обычно характеризуется безразмерной величиной, равной его отношению к моменту инерции (относительно той же оси) среды, взятой в объеме вращающегося тела. Эта безразмерная величина называется коэффициентом присоединенного момента инерции тела при вращении относительно данной оси и обозначается через k'. Обозначая через I момент инерции среды, взятой в объеме вращающегося тела относительно оси вращения, можем написать:

$$k'=\frac{J}{I}.$$

Нетрудно видеть, что присоединенный момент инерции можно трактовать, подобно присоединенной массе, еще с иной точки зрения, исходя из силового воздействия среды на тело при его неустановившемся движении. При *неравномерном вращательном движении* тела на него будет действовать пара сил, проекция момента которой на ось вращения l согласно теореме живых сил равна

$$M_l=-\frac{1}{\Omega}\frac{dT}{dt}.$$

Так как при потенциальном движении в идеальной несжимаемой жидкости $J=\text{const}$ для данного тела, вращающегося вокруг данной оси, то по формуле (5.165):

$$\frac{dT}{dt}=J\Omega\frac{d\Omega}{dt}$$

и для проекции момента аэродинамической пары получаем выражение

$$M_l=-J\frac{d\Omega}{dt}.$$

Это значит, что если для вращения тела в пустоте с угловым ускорением $d\Omega/dt$ к нему необходимо приложить пару сил с моментом $\mathfrak{M}=\mathfrak{J}\, d\Omega/dt$, где $\mathfrak{J}$ есть момент инерции тела относительно оси вращения, то для вращения этого же тела в идеальной среде с тем же ускорением этого момента недостаточно. Необходимо в этом случае приложить к телу пару сил с моментом $\mathfrak{M}_1=\mathfrak{M}-\boldsymbol{M}$, проекция которого на ось вращения равна

$$\mathfrak{M}-M_l=(\mathfrak{J}+J)\frac{d\Omega}{dt}.$$

Выясним на конкретном примере влияние присоединенной массы и присоединенного момента инерции на движение тела в жидкости. Для этого представим себе подводную лодку, уравновешенную на некоторой глубине. Заменим мысленно корпус лодки соответствующим эллипсоидом вращения; пусть удлинение этого эллипсоида будет равно 8. Если подводная лодка, не имея дифферента, всплывает, то ее коэффициент присоединенной массы можно приближенно принять равным 0,945. Это означает, что ее масса при движении как бы увеличивается в 1,945 раза, и следовательно, величины ускорений лодки будут в 1,945 раза меньше, нежели они были бы без учета присоединенной массы. Если лодка совершает колебательное движение вокруг поперечной оси, то ее коэффициент присоединенного момента инерции при этом движении можно приближенно принять равным 0,840. Предположив, что масса лодки распределена равномерно по ее длине, получим, что ее момент инерции относительно поперечной оси как бы увеличился в 1,840 раза оттого, что приводятся в движение частицы жидкости. Следовательно, угловые ускорения во столько же раз уменьшатся по сравнению с угловыми ускорениями при колебании лодки под действием гидравлических сил.

§ 45. Вариационный метод решения задачи о движении идеальной жидкости

Изучение кинетической энергии жидкой или газообразной среды, возникающей при движении в ней тела, дает возможность не только определить аэродинамические силы и моменты, но позволяет также вычислить поле скоростей, а значит, и распределение давлений.

Если исходить из выражения для кинетической энергии среды, то задача об определении поля скоростей потенциального потока жидкости или газа может быть решена, как будет показано в настоящем параграфе, методами *вариационного исчисления* [1]). Мы ограничимся для простоты изложения случаем плоского, потенциального течения несжимаемой жидкости, однако вариационные методы могут быть аналогично применены и к пространственному течению, и к потенциальному течению газа.

Докажем, что задача об определении поля скоростей потенциального потока эквивалентна задаче об отыскании функции, доставляющей минимальное значение некоторому интегралу, зависящему от этой функции. Рассмотрим с этой целью кинетическую энергию среды, в которой движется тело. Выделим двумя плоскостями, параллельными плоскости течения xy, слой жидкости толщиною в единицу длины. Кинетическая энергия T жидкости, заключенной в этом слое, может быть выражена в виде

$$T=\frac{\rho}{2}\iint\limits_{(S)}(v_x^{*2}+v_y^{*2})\,dx\,dy;$$

здесь интегрирование распространяется на всю область (S), внешнюю к контуру тела, а значок * при букве v указывает на то, что в данном случае речь идет о скорости, вызванной движением тела в покоящейся (на бесконечности) среде, а не о скорости в потоке, набегающем на неподвижное тело.

Докажем, что необходимым и достаточным условием того, чтобы кинетическая энергия, вызванная движением тела в среде, была минимальной из

[1]) Предметом вариационного исчисления является определение таких функций, которые, будучи подставлены в подынтегральное выражение заданного интеграла, содержащее искомую функцию и ее производные, доставляет интегралу максимальное или минимальное значение. С вариационным исчислением можно познакомиться по книгам: Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. IV, Физматгиз, 1958; Гельфанд И. М. и Фомин С. В., Вариационное исчисление, Физматгиз, 1961.