Выясним на конкретном примере влияние присоединенной массы и присоединенного момента инерции на движение тела в жидкости. Для этого представим себе подводную лодку, уравновешенную на некоторой глубине. Заменим мысленно корпус лодки соответствующим эллипсоидом вращения; пусть удлинение этого эллипсоида будет равно 8. Если подводная лодка, не имея дифферента, всплывает, то ее коэффициент присоединенной массы можно приближенно принять равным 0,945. Это означает, что ее масса при движении как бы увеличивается в 1,945 раза, и следовательно, величины ускорений лодки будут в 1,945 раза меньше, нежели они были бы без учета присоединенной массы. Если лодка совершает колебательное движение вокруг поперечной оси, то ее коэффициент присоединенного момента инерции при этом движении можно приближенно принять равным 0,840. Предположив, что масса лодки распределена равномерно по ее длине, получим, что ее момент инерции относительно поперечной оси как бы увеличился в 1,840 раза оттого, что приводятся в движение частицы жидкости. Следовательно, угловые ускорения во столько же раз уменьшатся по сравнению с угловыми ускорениями при колебании лодки под действием гидравлических сил.

§ 45. Вариационный метод решения задачи о движении идеальной жидкости

Изучение кинетической энергии жидкой или газообразной среды, возникающей при движении в ней тела, дает возможность не только определить аэродинамические силы и моменты, но позволяет также вычислить поле скоростей, а значит, и распределение давлений.

Если исходить из выражения для кинетической энергии среды, то задача об определении поля скоростей потенциального потока жидкости или газа может быть решена, как будет показано в настоящем параграфе, методами *вариационного исчисления* [1]). Мы ограничимся для простоты изложения случаем плоского, потенциального течения несжимаемой жидкости, однако вариационные методы могут быть аналогично применены и к пространственному течению, и к потенциальному течению газа.

Докажем, что задача об определении поля скоростей потенциального потока эквивалентна задаче об отыскании функции, доставляющей минимальное значение некоторому интегралу, зависящему от этой функции. Рассмотрим с этой целью кинетическую энергию среды, в которой движется тело. Выделим двумя плоскостями, параллельными плоскости течения xy, слой жидкости толщиною в единицу длины. Кинетическая энергия T жидкости, заключенной в этом слое, может быть выражена в виде

$$T=\frac{\rho}{2}\iint\limits_{(S)}(v_x^{*2}+v_y^{*2})\,dx\,dy;$$

здесь интегрирование распространяется на всю область (S), внешнюю к контуру тела, а значок * при букве v указывает на то, что в данном случае речь идет о скорости, вызванной движением тела в покоящейся (на бесконечности) среде, а не о скорости в потоке, набегающем на неподвижное тело.

Докажем, что необходимым и достаточным условием того, чтобы кинетическая энергия, вызванная движением тела в среде, была минимальной из

[1]) Предметом вариационного исчисления является определение таких функций, которые, будучи подставлены в подынтегральное выражение заданного интеграла, содержащее искомую функцию и ее производные, доставляет интегралу максимальное или минимальное значение. С вариационным исчислением можно познакомиться по книгам: Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. IV, Физматгиз, 1958; Гельфанд И. М. и Фомин С. В., Вариационное исчисление, Физматгиз, 1961.

всех возможных, является отсутствие вращения частиц в среде. Представим для этого компоненты скорости какого-либо из возможных движений среды при заданном движении тела в виде сумм компонент, соответствующих потенциальному движению, и компонент, соответствующих движению с вращением частиц:

$$v_x^* = \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} + v_{x0}^*, \qquad v_y^* = \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} + v_{y0}^*,$$

где φ^* есть потенциал скоростей. Подставляя эти выражения в общую формулу для кинетической энергии среды, получим:

$$T = \frac{\rho}{2} \iint\limits_{(S)} \left[\left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy + \frac{\rho}{2} \iint\limits_{(S)} (v_{x0}^{*2} + v_{y0}^{*2})\,dx\,dy + \\ + \frac{\rho}{2} \iint\limits_{(S)} 2\left[v_{x0}^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} + v_{y0}^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial y}\right] dx\,dy. \qquad (5.166)$$

Здесь первое слагаемое выражает кинетическую энергию среды при ее потенциальном движении, соответствующем заданному движению тела; второе слагаемое выражает кинетическую энергию среды при ее движении с компонентами скорости, равными v_{x0}^* и v_{y0}^*. Для вычисления третьего слагаемого воспользуемся следующими тождествами:

$$\frac{\partial (\varphi^* v_{x0}^*)}{\partial x} = \varphi^* \frac{\partial v_{x0}^*}{\partial x} + v_{x0}^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial x}, \qquad \frac{\partial (\varphi^* v_{y0}^*)}{\partial y} = \varphi^* \frac{\partial v_{y0}^*}{\partial y} + v_{y0}^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial y}.$$

Вследствие этих тождеств имеем:

$$\iint\limits_{(S)} \left[v_{x0}^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} + v_{y0}^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial y}\right] dx\,dy = -\iint\limits_{(S)} \varphi^* \left(\frac{\partial v_{x0}^*}{\partial x} + \frac{\partial v_{y0}^*}{\partial y}\right) dx\,dy + \\ + \iint\limits_{(S)} \left[\frac{\partial (\varphi^* v_{x0}^*)}{\partial x} + \frac{\partial (\varphi^* v_{y0}^*)}{\partial y}\right] dx\,dy.$$

Так как компоненты скорости v_{x0}^* и v_{y0}^* должны удовлетворять уравнению неразрывности движения для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial v_{x0}^*}{\partial x} + \frac{\partial v_{y0}^*}{\partial y} = 0,$$

то первый из интегралов в правой части последнего тождества равен нулю. Второй из этих интегралов преобразуем по теореме Остроградского в контурный интеграл, распространенный по контуру сечения тела плоскостью, параллельной плоскости xy [1]):

$$\iint\limits_{(S)} \left[\frac{\partial (\varphi^* v_{x0}^*)}{\partial x} + \frac{\partial (\varphi^* v_{y0}^*)}{\partial y}\right] dx\,dy = -\oint\limits_{(L)} \varphi^* v_{n0}^*\,ds;$$

здесь ds есть элемент дуги контура L, а n — направление внешней нормали

[1]) В теореме Остроградского предполагается, что область (S) односвязная. Для того чтобы сделать в данном случае эту область односвязной, следует провести в ней разрез, соединяющий контур (L) с бесконечно удаленной точкой. При этом разрез необходимо провести вдоль линии тока; тогда вдоль разреза будет выполняться условие $v_{n0}^* = 0$ и контурный интеграл, распространенный на линию разреза, будет равен нулю.

к контуру. Но на контуре (L) $v_{n0}^*=0$, ибо

$$v_n^*=\frac{\partial\varphi^*}{\partial n}+v_{n0}^*,$$

а вследствие граничных условий для потенциала скорости имеем в точках контура

$$\frac{\partial\varphi^*}{\partial n}=v_n^*.$$

Таким образом, рассматриваемый контурный интеграл равен нулю, и следовательно, в равенстве (5.166) остаются лишь первые два интеграла. Обозначая слагаемое, выражающее кинетическую энергию среды при потенциальном движении, через T_1, а слагаемое, выражающее кинетическую энергию среды при ее движении с компонентами скорости v_{x0}^* и v_{y0}^*, — через T_0, сможем написать, что кинетическая энергия при произвольном возможном движении среды равна

$$T=T_1+T_0.$$

Отсюда видно, что *если движение среды*, вызванное заданным движением тела, *потенциальное*, т. е. $v_{x0}^*=v_{y0}^*=0$, *то* $T_0=0$ *и кинетическая энергия среды будет иметь минимальное значение* из всех возможных. И наоборот, *если кинетическая энергия среды имеет минимальное значение* из всех возможных, *то движение в среде будет потенциальным.* В самом деле, если кинетическая энергия среды минимальная, то в выражении (5.166) для T должно остаться лишь первое слагаемое, так как оно существует всегда, когда частицы имеют поступательное или деформационное движение; второе слагаемое должно при этом равняться нулю, что возможно лишь в том случае, если равны нулю v_{x0}^* и v_{y0}^*.

В вариационном исчислении устанавливается, что задача об отыскании функции, доставляющей максимальное или минимальное значение тому или иному интегралу, эквивалентна задаче решения соответствующего дифференциального уравнения. Выясним, какое дифференциальное уравнение соответствует задаче о минимуме интеграла, выражающего кинетическую энергию среды.

Предположим, что движение происходит без вращения частиц, т. е. является потенциальным; тогда будут иметь место следующие равенства:

$$v_x^*=\frac{\partial\varphi^*}{\partial x},\qquad v_y^*=\frac{\partial\varphi^*}{\partial y}.$$

Формула для кинетической энергии жидкости будет в этом случае иметь вид

$$T=\frac{\rho}{2}\iint\limits_{(S)}\left[\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy. \qquad (5.167)$$

Докажем, что необходимым условием минимума этого интеграла является условие, чтобы функция φ^* удовлетворяла уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial y^2}=0.$$

Предположим, что интеграл приобретает значение, минимальное из всех возможных при подстановке в подынтегральное выражение функции φ^*. Это означает, что если заменим функцию φ^* некоторой другой, мало отличающейся от нее функцией, то интеграл будет иметь бóльшее значение, нежели при подстановке φ^*. Возьмем функцию φ_1^*, мало отличающуюся от φ^*, в таком виде, чтобы φ_1^* зависела от некоторого параметра α, например возьмем ее в виде

$$\varphi_1^*=\varphi^*+\alpha\chi(x,y);$$

здесь $\chi(x, y)$ есть функция непрерывная, как и φ^*, вместе с первыми и вторыми частными производными и равная нулю на границах области интегрирования. Кроме того, на контуре сечения тела (L) производная $\partial\chi/\partial n$ должна равняться нулю, а при удалении от контура (L) на бесконечность производные от χ должны быть величинами малыми, порядка $\frac{1}{r}$, где r есть расстояние до контура тела. Функция φ_1^* удовлетворяет, таким образом, тем же граничным условиям, что и φ^*. Заменив в подынтегральном выражении φ^* на φ_1^*, мы сможем рассматривать интеграл как функцию параметра α: $T = T(\alpha)$. Тогда условие, что при $\varphi_1^* = \varphi^*$ интеграл приобретает минимальное значение, будет совпадать с условием, что при $\alpha = 0$ $T(\alpha)$ приобретает минимальное значение. Необходимым условием минимума функции является, как известно, равенство нулю производной от функции в точке, доставляющей минимум; следовательно, при $\alpha = 0$

$$\frac{dT(\varphi_1^*)}{d\alpha} = 0.$$

Подставляя в формулу для T вместо φ^* функцию φ_1^*, вычисляя производную от T по α и полагая затем $\alpha = 0$, получим в результате

$$\left(\frac{dT}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = \rho \iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x}\frac{\partial\chi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi^*}{\partial y}\frac{\partial\chi}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Так как имеют место тождества:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\chi\frac{\partial\varphi^*}{\partial x}\right) = \frac{\partial\varphi^*}{\partial x}\frac{\partial\chi}{\partial x} + \chi\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\chi\frac{\partial\varphi^*}{\partial y}\right) = \frac{\partial\varphi^*}{\partial y}\frac{\partial\chi}{\partial y} + \chi\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial y^2},$$

то последний интеграл равен

$$\iint\limits_{(S)} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\chi\frac{\partial\varphi^*}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\chi\frac{\partial\varphi^*}{\partial y}\right)\right] dx\, dy - \iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi^*}{\partial y^2}\right)\chi\, dx\, dy.$$

По теореме Остроградского получаем:

$$\iint\limits_{(S)} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\chi\frac{\partial\varphi^*}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\chi\frac{\partial\varphi^*}{\partial y}\right)\right] dx\, dy = -\oint\limits_{(L)} \chi\frac{\partial\varphi^*}{\partial n}\, ds;$$

здесь L есть контур сечения тела плоскостью, параллельной плоскости xy, а ds — элемент дуги этого контура. Так как функция $\chi(x, y)$ на контуре сечения тела равна по условию ее выбора нулю, то последний интеграл также равен нулю. Равенство $dT/d\alpha = 0$ теперь примет следующий вид:

$$\iint\limits_{(S)} \chi\left(\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi^*}{\partial y^2}\right) dx\, dy = 0;$$

но для того, чтобы этот интеграл был равен нулю при произвольной функции $\chi(x, y)$, необходимо, чтобы равнялось нулю выражение в скобках под знаком интеграла

$$\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi^*}{\partial y^2} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Докажем теперь, что если φ^* удовлетворяет уравнению Лапласа, то это является также достаточным условием минимума интеграла (5.167). Из предыдущих вычислений вытекает, что если φ^* удовлетворяет уравнению Лапласа, то производная от кинетической энергии по α равна нулю при $\alpha=0$. Для того, чтобы убедиться, что при $\alpha=0$ действительно имеет место минимум кинетической энергии, вычислим вторую производную от $T(\varphi_1^*)$ по α и положим затем $\alpha=0$; в результате получим:

$$\left(\frac{d^2T}{d\alpha^2}\right)_{\alpha=0}=\rho\iint\limits_{(S)}\left[\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy.$$

Какова бы ни была функция $\chi(x, y)$, последнее выражение представляет собою величину, положительную по знаку; следовательно, первая производная $dT/d\alpha$ в точке $\alpha=0$ есть функция, возрастающая, а сама величина кинетической энергии приобретает в этой точке минимальное значение. Таким образом мы доказали, что задача определения функции, удовлетворяющей уравнению Лапласа и соответствующим граничным условиям, эквивалентна задаче вариационного вычисления об отыскании функции φ^*, доставляющей минимальное значение интегралу (5.166).

Как уже указывалось, в вариационном исчислении обычно сводят задачу об экстремуме интеграла к задаче решения дифференциального уравнения. Этот путь не представляет здесь интереса, так как, по доказанному, дифференциальным уравнением, соответствующим задаче о минимуме интеграла (5.167), является уравнение Лапласа, которое как раз и необходимо решать при определении поля скоростей потенциального потока несжимаемой среды. Для нас представляет интерес обратный путь: решить уравнение Лапласа и найти таким образом поле скоростей с помощью *непосредственного, прямого* решения задачи о минимуме интеграла (5.167). Прямые, непосредственные методы решения задач вариационного исчисления были даны академиком Б. Г. Галеркиным и В. Ритцом[1]). Эти методы были развиты В. Т. Дубасовым применительно к задаче о вычислении поля скоростей потенциального движения жидкости[2]).

Сущность прямых методов вариационного исчисления состоит в том, что для потенциала скоростей или для функции тока (в случае плоского или симметрично осевого потока) задается приближенное выражение в виде суммы:

$$F=\sum_{i=1}^{i=n}a_if_i;$$

здесь f_i представляет собою заранее выбранные, линейно независимые друг от друга функции, каждая из которых удовлетворяет граничным условиям, a_i — постоянные для данной задачи величины, не зависящие от функций f_i. Вычисление потенциала скоростей или функции тока сводится, таким образом, к определению коэффициентов a_i.

Подставляя в выражение для кинетической энергии среды вместо компонент скорости их выражения через F, мы получим, что условие, чтобы кинетическая энергия была минимальной из всех возможных, состоит в выполнении n уравнений:

$$\frac{\partial T}{\partial a_i}=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

---

[1]) По поводу методов Галеркина и Ритца см. литературу, указанную в начале параграфа, а также Михлин С. Г., Прямые методы в математической физике, ГТТИ, 1950.

[2]) Дубасов В. Т., Применение вариационных методов к решению задач аэродинамики, Труды Моск. авиац. технол. ин-та, сборник № 42, Оборонгиз, 1959.

которые являются линейными относительно a_i. Решая эту систему уравнений, мы найдем приближенное выражение для потенциала скоростей или функции тока. Разумеется, что для того, чтобы получить достаточно точный результат с наименьшим количеством слагаемых в выражении для F, следует удачно выбрать функции f_i и, в частности, следует взять функцию f_1 возможно более близкой к точному решению задачи.

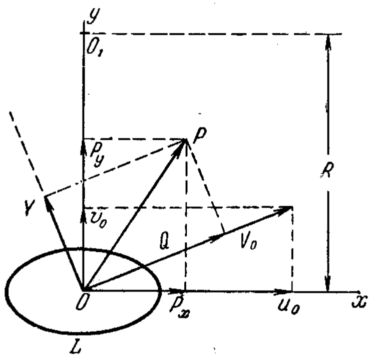

Рис. 5.110. Система координатных осей, связанных с движущимся цилиндром.

Пример[1]). В качестве примера, иллюстрирующего применение вариационного метода к решению задач аэродинамики, рассмотрим движение несжимаемой жидкости, вызванное произвольным движением цилиндра бесконечной длины перпендикулярно к его образующим.

Выберем систему осей координат, неизменно связанную с цилиндром, как указано на рис. 5.110. Обозначим через u_0, v_0 проекции скорости точки 0 соответственно на оси x и y, а через ω — угловую скорость вращения вокруг оси, перпендикулярной к плоскости чертежа. Величины u_0, v_0 и ω могут зависеть от времени и могут быть постоянными.

В рассматриваемом случае удобнее перейти от прямоугольных координат к эллиптическим; этот переход, как известно из § 19 гл. IV, осуществляется с помощью равенств

$$x = 2r_0 \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \qquad y = 2r_0 \operatorname{sh} \xi \sin \eta. \tag{5.168}$$

Пусть уравнение контура (L) (рис. 5.110) задано зависимостью $\xi = \xi_0(\eta)$; тогда координаты контура (L) в системе xy определятся равенствами

$$x_0 = 2r_0 \operatorname{ch} \xi_0 \cos \eta, \qquad y_0 = 2r_0 \operatorname{sh} \xi_0 \sin \eta.$$

Для эллиптического цилиндра $\xi_0 = \text{const}$; при этом r_0 и ξ_0 определяются из равенств

$$a = 2r_0 \operatorname{ch} \xi_0, \qquad b = 2r_0 \operatorname{sh} \xi_0,$$

где a и b — полуоси эллипса.

Если перейти от прямоугольных координат к эллиптическим по формулам § 19 гл. IV и вместо потенциала скорости ввести функцию тока, то выражение для кинетической энергии примет следующий вид:

$$T = \frac{\rho}{2} \iint\limits_{(S)} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\xi \, d\eta, \tag{5.169}$$

где

$$\xi_0 \leqslant \xi \leqslant \infty, \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant 2\pi.$$

Сформулируем граничное условие, которому должна удовлетворять функция тока на контуре (L). При безотрывном обтекании нормальные составляющие скоростей частиц жидкости и нормальные составляющие скоростей точек контура (L) должны быть равны между собой. Так как проекции скорости точки контура (L) с координатами x_0, y_0 на оси x и y соответственно равны

$$V_x = u_0 - \omega y_0, \qquad V_y = v_0 + \omega x_0, \tag{5.170}$$

то

$$V_n = V_x \cos(\widehat{n, x}) + V_y \cos(\widehat{n, y}) = V_x \frac{dy_0}{ds} - V_y \frac{dx_0}{ds},$$

[1]) Этот пример написан В. Т. Дубасовым.

где ds — элемент дуги контура (L). Подставляя в полученное выражение значения V_x и V_y из (5.170), находим:

$$V_n = \frac{d}{ds}\left[u_0 y_0 - v_0 x_0 - \frac{\omega}{2}(x_0^2 + y_0^2)\right].$$

С другой стороны, нормальная составляющая скорости частицы жидкости на контуре L равна $d\psi/ds$; поэтому

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{d}{ds}\left[u_0 y_0 - v_0 x_0 - \frac{\omega}{2}(x_0^2 + y_0^2)\right].$$

Интегрируя и отбрасывая произвольную функцию времени, как не имеющую существенного значения, получим:

$$\psi_{(L)} = u_0 y_0 - v_0 x_0 - \frac{\omega}{2}(x_0^2 + y_0^2).$$

Заметим, что полученное выражение для функции $\psi_{(L)}$ будет справедливым для контура (L) произвольной формы. Однако в дальнейшем будем рассматривать только эллипс.

Согласно изложенному в этом параграфе мы выберем функцию тока ψ_N в следующем виде:

$$\psi_N = \psi_0(\xi, \eta, t) + \sum_{k=1}^{N} R_k(\xi)(a_k \cos k\eta + b_k \sin k\eta). \tag{5.171}$$

Для того чтобы функция ψ_0 удовлетворяла граничным условиям, примем:

$$\psi_0 = e^{-\tau}(u_0 y_0 - v_0 x_0) - \frac{\omega}{2} e^{-2\tau}(x_0^2 + y_0^2) - A_0 \tau,$$

где $\tau = \xi - \xi_0$, а A_0 есть некоторая величина, не зависящая от τ и η. Тогда функции $R_k(\xi)$ должны удовлетворять следующим условиям: $R_k(\xi_0) = 0$, $R_k(\infty) = 0$.

Вычисляя производные $\partial\psi_N/\partial\xi$ и $\partial\psi_N/\partial\eta$ и подставляя их в выражение кинетической энергии (5.169), получим T как функцию коэффициентов a_k и b_k.

Из условия минимума кинетической энергии имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial a_k} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial b_k} = 0.$$

Если выполнить указанные действия и проинтегрировать по η от нуля до 2π, то убедимся, что свободные члены в уравнениях для определения коэффициентов a_k и b_k обращаются в нули, а так как выбранные функции линейно независимы, то приходим к заключению, что

$$a_k = 0, \qquad b_k = 0.$$

Не следует, однако, думать, что ψ_0 представляет собой функцию тока, соответствующую потенциальному течению; в этом легко убедиться, подставив ее в уравнение Лапласа.

Итак, мы получаем следующее выражение для функции тока:

$$\psi_N = e^{-\tau}(u_0 y_0 - v_0 x_0) - \frac{\omega}{2} e^{-2\tau}(x_0^2 + y_0^2) - A_0 \tau,$$

или, подставляя $x_0 = a \cos\eta$, $y_0 = b \sin\eta$, имеем:

$$\psi_N = e^{-\tau}(u_0 b \sin\eta - v_0 a \cos\eta) - \frac{\omega}{2} e^{-2\tau}(a^2 \cos^2\eta + b^2 \sin^2\eta) - A_0 \tau.$$

Зная функцию тока, можно определить скорость в точках контура (L). Относительная скорость будет направлена по касательной к контуру и равна разности проекций на касательную абсолютной и переносной скоростей:

$$V_{\text{отн}}\frac{ds}{d\eta}=(a+b)(u_0\sin\eta-v_0\cos\eta)-\omega(a^2\cos^2\eta+b^2\sin^2\eta+ab)-A_0.$$

Циркуляция по контуру (L) вычисляется по формуле

$$\Gamma=\int_{(L)}V_{\text{отн}}\,ds+2\omega F,$$

где F — площадь, ограниченная контуром (L). В нашем случае

$$\Gamma=-\pi(a^2+b^2)\omega-2\pi A_0,$$

откуда имеем:

$$A_0=-\frac{\Gamma}{2\pi}-\frac{\omega}{2}(a^2+b^2).$$

Подставляя A_0 в формулу для относительной скорости, находим:

$$V_{\text{отн}}\frac{ds}{d\eta}=(a+b)(u_0\sin\eta-v_0\cos\eta)-\frac{\omega}{2}(a^2-b^2)\cos 2\eta-\omega ab+\frac{\Gamma}{2\pi}. \tag{5.172}$$

Зная распределение скорости по контуру (L), можно определить давления и, следовательно, вычислить силы и момент, действующие на цилиндр. Если начало координат совмещено с центром инерции площади, ограниченной контуром (L), то проекции силы на подвижные оси и момент относительно начала координат вычисляются по общим формулам [1]):

$$\frac{P_x}{\rho}=-v_0\Gamma+F\left(\frac{du_0}{dt}-\omega v_0\right)-\omega\int_{(L)}x_0V_{\text{отн}}\,ds-\frac{\partial}{\partial t}\int_{(L)}y_0V_{\text{отн}}ds-\bar{y}_0\frac{d\Gamma}{dt},$$

$$\frac{P_y}{\rho}=u_0\Gamma+F\left(\frac{dv_0}{dt}+\omega u_0\right)-\omega\int_{(L)}y_0V_{\text{отн}}\,ds+\frac{\partial}{\partial t}\int_{(L)}x_0V_{\text{отн}}ds-\bar{x}_0\frac{d\Gamma}{dt},$$

$$\frac{M_0}{\rho}=2J_0\frac{d\omega}{dt}+\int_{(L)}(x_0u_0+y_0v_0)V_{\text{отн}}ds+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{(L)}(x_0^2+y_0^2)V_{\text{отн}}ds-\bar{r}_0^2\frac{d\Gamma}{dt},$$

где J_0 есть полярный момент инерции площади F, $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$ и $\bar{r}_0$ — координаты точки контура (L) и ее расстояние до начала координат.

Подставляя сюда $x_0=a\cos\eta$, $y_0=b\sin\eta$ и $V_{\text{отн}}$ из (5.172) и выполняя несложные вычисления, получим:

$$P_x=-\pi\rho b^2\frac{du_0}{dt}+\pi\rho a^2\omega v_0-\rho v_0\Gamma-\rho\bar{y}_0\frac{d\Gamma}{dt},$$

$$P_y=-\pi\rho a^2\frac{dv_0}{dt}-\pi\rho b^2\omega u_0+\rho u_0\Gamma-\rho\bar{x}_0\frac{d\Gamma}{dt},$$

$$M_0=-\frac{\pi}{8}\rho(a^2-b^2)\frac{d\omega}{dt}-\pi\rho(a^2-b^2)u_0v_0+\rho\left(\frac{a^2+b^2}{4}-\bar{r}_0^2\right)\frac{d\Gamma}{dt}.$$

[1]) См., например, цитированную выше работу В. Т. Дубасова.

Циркуляцию можно определить, например из условия, что при $\eta = \pi$, $V_{\text{отн}} = 0$; тогда из (5.172), находим:

$$\Gamma = \pi\omega (a^2 - b^2 + 2ab) - 2\pi (a + b) v_0.$$

Определим теперь силу лобового сопротивления и подъемную силу для случая $\Gamma = \text{const}$. Для этой цели спроектируем силы P_x и P_y на направления скорости и перпендикуляр к ней; тогда, как это следует из рис. 5.110, будем иметь:

$$Q = P_x \frac{u_0}{V_0} + P_y \frac{v_0}{V_0} = -\frac{\pi\rho}{V_0}\left[b^2 u_0 \frac{du_0}{dt} + a^2 v_0 \frac{dv_0}{dt} - \omega u_0 v_0 (a^2 - b^2)\right],$$

$$Y = P_y \frac{u_0}{V_0} - P_x \frac{v_0}{V_0} = -\frac{\pi\rho}{V_0}\left[a^2 u_0 \frac{dv_0}{dt} - b^2 v_0 \frac{du_0}{dt} + \omega (b^2 u_0^2 + a^2 v_0^2)\right] + \rho V_0 \Gamma,$$

$$M_0 = -\frac{\pi\rho}{8}(a^2 - b^2)^2 \frac{d\omega}{dt} - \pi\rho (a^2 - b^2) u_0 v_0.$$

Если положить $b = 0$, то эллипс превращается в пластину с шириной, равной $2a$. Для сил и моментов, действующих на пластину, получаются формулы:

$$Q = -\pi\rho a^2 \left(\frac{v_0}{V_0}\frac{dv_0}{dt} - \omega \frac{u_0 v_0}{V_0}\right),$$

$$Y = -\pi\rho a^2 \left(\frac{u_0}{V_0}\frac{dv_0}{dt} + \omega \frac{v_0^2}{V_0}\right) + \rho V_0 \Gamma,$$

$$M_0 = -\frac{\pi}{8} a^2 \rho \frac{d\omega}{dt} - \pi\rho a^2 u_0 v_0.$$

В случае вращения эллипса или пластины вокруг точки O_1, находящейся на оси y, $v_0 = 0$, $u_0 = \omega R$. Если $\Gamma = \text{const}$, то и ω также должна быть величиной постоянной. Тогда для вращающегося эллипса имеем:

$$Q = 0, \quad Y = \pi\rho R\omega^2 (a^2 - 2b^2 + 2ab), \quad M_0 = 0.$$

Для пластины соответственно получается:

$$Q = 0, \quad Y = \pi\rho R a^2 \omega^2, \quad M_0 = 0.$$

Из общих формул для сил и момента можно получить их выражения и в других частных случаях движения эллипса, окружности и пластины.

§ 46. Подъемная сила при движении тела с постоянной скоростью. Теорема Жуковского о подъемной силе в плоском потоке

В предыдущих параграфах (§§ 40—45) были рассмотрены аэродинамические силы и моменты, действующие на тело при движении в идеальной несжимаемой жидкости в условиях, когда течение жидкости, вызванное перемещением тела, является безвихревым (потенциальным) с однозначным потенциалом скорости. Эти силы и моменты имеют, как уже указывалось, *инерционное происхождение* и возникают оттого, что тело при своем движении в идеальной несжимаемой жидкости должно сообщать ускорения ее частицам. Однако если течение, вызываемое телом в окружающей среде, является вихревым, то кроме этих сил на тело будут действовать еще другие силы *вихревого происхождения*. К числу этих сил относится подъемная