Циркуляцию можно определить, например из условия, что при $\eta = \pi$, $V_{\text{отн}} = 0$; тогда из (5.172), находим:

$$\Gamma = \pi\omega(a^2 - b^2 + 2ab) - 2\pi(a + b)v_0.$$

Определим теперь силу лобового сопротивления и подъемную силу для случая $\Gamma = \text{const}$. Для этой цели спроектируем силы P_x и P_y на направления скорости и перпендикуляр к ней; тогда, как это следует из рис. 5.110, будем иметь:

$$Q = P_x \frac{u_0}{V_0} + P_y \frac{v_0}{V_0} = -\frac{\pi\rho}{V_0}\left[b^2 u_0 \frac{du_0}{dt} + a^2 v_0 \frac{dv_0}{dt} - \omega u_0 v_0 (a^2 - b^2)\right],$$

$$Y = P_y \frac{u_0}{V_0} - P_x \frac{v_0}{V_0} = -\frac{\pi\rho}{V_0}\left[a^2 u_0 \frac{dv_0}{dt} - b^2 v_0 \frac{du_0}{dt} + \omega(b^2 u_0^2 + a^2 v_0^2)\right] + \rho V_0 \Gamma,$$

$$M_0 = -\frac{\pi\rho}{8}(a^2 - b^2)^2 \frac{d\omega}{dt} - \pi\rho(a^2 - b^2)u_0 v_0.$$

Если положить $b = 0$, то эллипс превращается в пластину с шириной, равной $2a$. Для сил и моментов, действующих на пластину, получаются формулы:

$$Q = -\pi\rho a^2\left(\frac{v_0}{V_0}\frac{dv_0}{dt} - \omega\frac{u_0 v_0}{V_0}\right),$$

$$Y = -\pi\rho a^2\left(\frac{u_0}{V_0}\frac{dv_0}{dt} + \omega\frac{v_0^2}{V_0}\right) + \rho V_0 \Gamma,$$

$$M_0 = -\frac{\pi}{8}a^2\rho\frac{d\omega}{dt} - \pi\rho a^2 u_0 v_0.$$

В случае вращения эллипса или пластины вокруг точки O_1, находящейся на оси y, $v_0 = 0$, $u_0 = \omega R$. Если $\Gamma = \text{const}$, то и ω также должна быть величиной постоянной. Тогда для вращающегося эллипса имеем:

$$Q = 0, \quad Y = \pi\rho R\omega^2(a^2 - 2b^2 + 2ab), \quad M_0 = 0.$$

Для пластины соответственно получается:

$$Q = 0, \quad Y = \pi\rho R a^2 \omega^2, \quad M_0 = 0.$$

Из общих формул для сил и момента можно получить их выражения и в других частных случаях движения эллипса, окружности и пластины.

§ 46. Подъемная сила при движении тела с постоянной скоростью. Теорема Жуковского о подъемной силе в плоском потоке

В предыдущих параграфах (§§ 40—45) были рассмотрены аэродинамические силы и моменты, действующие на тело при движении в идеальной несжимаемой жидкости в условиях, когда течение жидкости, вызванное перемещением тела, является безвихревым (потенциальным) с однозначным потенциалом скорости. Эти силы и моменты имеют, как уже указывалось, *инерционное происхождение* и возникают оттого, что тело при своем движении в идеальной несжимаемой жидкости должно сообщать ускорения ее частицам. Однако если течение, вызываемое телом в окружающей среде, является вихревым, то кроме этих сил на тело будут действовать еще другие силы *вихревого происхождения*. К числу этих сил относится подъемная сила при поступательном движении с постоянной скоростью. Природа этой силы и ее величина впервые были выяснены основоположником аэродинамики Н. Е. Жуковским в 1904 г.; в 1906 г. он опубликовал свою знаменитую теорему о подъемной силе[1]), являющуюся основой теории крыла и воздушного винта и положившую начало всей современной аэродинамике.

Перейдем к доказательству теоремы Жуковского о подъемной силе. Рассмотрим плоский установившийся поток несжимаемой жидкости, обтекающий бесконечно длинный цилиндр (крыло) произвольного поперечного сечения; направление потока пусть будет перпендикулярно к образующим цилиндра. На поверхности цилиндра могут быть вихри, оси которых параллельны образующим (эти вихри заменяют вращение частиц, существующее в действительности в пограничном слое). Предположим, что вне цилиндра и его вихревого слоя вращение частиц отсутствует и, следовательно, поток потенциален. В этом случае, как следует из теоремы Стокса (гл. IV, § 22), циркуляция скорости по любому замкнутому контуру, охватывающему обтекаемый цилиндр, будет иметь одну и ту же для всех таких контуров величину, которую мы обозначим через Γ. Примем за положительное направление обхода контура при вычислении циркуляции такое направление, при котором ограниченная контуром область остается во время обхода по правую сторону.

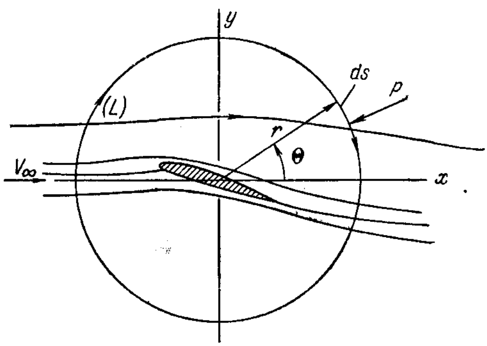

Рис. 5.111. К доказательству теоремы Жуковского.

Проведем мысленно на плоскости течения окружность, как показано на рис. 5.111. Предположим, что радиус этой окружности r велик по сравнению с размерами поперечного сечения обтекаемого цилиндра. Рассмотрим жидкий объем, ограниченный цилиндрической поверхностью (мы будем называть ее *контрольной поверхностью*), для которой направляющей линией служит указанная окружность; высота этого цилиндра пусть будет равна единице длины (как это обычно принимается при изучении плоского потока). Применим к выделенному таким образом жидкому объему теорему импульсов.

Обозначим через dI изменение количества движения выделенного объема жидкости; тогда по теореме импульсов сможем написать:

$$\frac{dI}{dt} = F,$$

[1]) Жуковский Н. Е., О присоединенных вихрях, Труды Отделения физических наук Общества любителей естествознания, т. XIII, вып. 2, 1906.

где $\boldsymbol{F}$ — результирующая сила, приложенная к этому объему жидкости. Вес жидкости в выделенном объеме уравновешивается изменением по высоте сил давления, распределенных по контрольной поверхности. Поэтому силу веса и весовое давление мы не будем учитывать, т. е. будем рассматривать среду как невесомую. Кроме силы веса на выделенный объем жидкости действуют: реакция со стороны тела, которую мы обозначим через $-\boldsymbol{R}$ (понимая под $\boldsymbol{R}$ силу воздействия среды на тело), и давления, распределенные по контрольной поверхности; силы трения на контрольной поверхности отсутствуют, так как жидкость в точках этой поверхности предполагается идеальной. Обозначив через $\boldsymbol{P}$ результирующую сил давления, приложенных к контрольной поверхности, будем иметь:

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{P}-\boldsymbol{R};$$

таким образом, теорема импульсов запишется в виде

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{P}-\frac{d\boldsymbol{I}}{dt}.$$

Проектируя это равенство на оси скоростной системы координат, получим:

$$Q=P_x-\frac{dI_x}{dt}, \qquad Y=P_y-\frac{dI_y}{dt}. \tag{5.173}$$

Вычислим каждое слагаемое в правой части этих формул. Обозначим скорость потока на бесконечности через V_∞, а составляющие скорости в какой-либо точке потока, вызванные присутствием в нем обтекаемого цилиндра, — через v'_x и v'_y; тогда в системе координат, изображенной на рис. 5.111, составляющие полной скорости потока $\boldsymbol{v}$ будут соответственно равны

$$v_x=V_\infty+v'_x, \qquad v_y=v'_y. \tag{5.174}$$

При удалении точки от цилиндра возмущения v'_x и v'_y, вызванные им в этой точке, убывают и на бесконечности становятся равными нулю. Так как поток, вызванный телом, по предположению потенциален, то его можно представить себе как результат наложения плоских вихрей, источников и стоков, распределенных внутри цилиндра или на его поверхности. В каждом из этих элементарных потоков скорость убывает при удалении от центра обратно пропорционально расстоянию до него. Поэтому v'_x и v'_y в точках окружности радиуса r можно считать величинами малыми, порядка $1/r$, или более высокого порядка малости.

Изменение количества движения жидкого объема за какой-либо промежуток времени в случае установившегося потока по теореме Эйлера (гл. V, § 1) равно количеству движения, протекшему за то же время сквозь поверхность, ограничивающую жидкий объем. Возьмем на контрольной поверхности элементарную площадку, равную $ds\cdot 1$, где $ds=r\,d\theta$ есть элемент дуги окружности радиуса r, а единица представляет собою размер, перпендикулярный к плоскости течения. Сквозь эту площадку протекает в единицу времени масса жидкости, равная $\rho v_r ds \cdot 1$, где v_r есть составляющая скорости вдоль радиуса r. Количество движения этой массы равно $\rho v_r ds \boldsymbol{v}$; сквозь всю контрольную поверхность протекает в единицу времени количество движения, равное интегралу от последнего выражения по контуру контрольной поверхности; таким образом,

$$\frac{dI}{dt}=\oint\limits_{(L)} \rho v_r \boldsymbol{v}\, ds.$$

Проекции этого количества движения на оси координат сооответственно равны

$$\frac{dI_x}{dt}=\oint\limits_{(L)} \rho v_r v_x ds, \qquad \frac{dI_y}{dt}=\oint\limits_{(L)} \rho v_r v_y ds.$$

Заменим здесь v_x и v_y их выражениями (5.174), а v_r — по формуле

$$v_r=v_x \cos\theta+v_y \sin\theta,$$

где θ есть полярный угол; тогда получим:

$$\frac{dI_x}{dt}=\oint\limits_{(L)} \rho\left[(V_\infty+v'_x)\cos\theta+v'_y\sin\theta\right](V_\infty+v'_x)\,ds,$$

$$\frac{dI_y}{dt}=\oint\limits_{(L)} \rho\left[(V_\infty+v'_x)\cos\theta+v'_y\sin\theta\right]v'_y ds.$$

Так как v'_x и v'_y суть величины малые, порядка $1/r$, то их произведения или квадраты будут иметь порядок малости $1/r^2$; объединяя в каждом из последних выражений, находящихся под знаком интеграла, все слагаемые, пропорциональные $1/r^2$, будем иметь:

$$\frac{dI_x}{dt}=\oint\limits_{(L)} \rho\left[(V_\infty^2+2V_\infty v'_x)\cos\theta+V_\infty v'_y\sin\theta+A\frac{1}{r^2}\right]ds=$$

$$=\oint\limits_{(L)} \rho\left[2V_\infty v'_x\cos\theta+V_\infty v'_y\sin\theta+A\frac{1}{r^2}\right]ds,$$

$$\frac{dI_y}{dt}=\oint\limits_{(L)} \rho\left(V_\infty v'_y\cos\theta+B\frac{1}{r^2}\right)ds,$$

где A и B — соответствующие коэффициенты пропорциональности, которые зависят от координаты θ точки, взятой на окружности L, но не зависят от r. В результате интегрирования по окружности радиуса r слагаемые, пропорциональные $1/r^2$, дадут величины малые, пропорциональные $1/r$, в то время как все остальные слагаемые будут представлять собою конечные величины.

Найдем P_x и P_y; элементарная нагрузка, приложенная к площадке $ds\cdot 1$, равна $p\cdot ds\cdot 1$; проекции этой нагрузки на оси координат соответственно равны $-p\,ds\cos\theta$, $-p\,ds\sin\theta$; следовательно,

$$P_x=-\oint_{(L)} p\cos\theta\,ds,\quad P_y=-\oint_{(L)} p\sin\theta\,ds.$$

В последние формулы удобно ввести вместо абсолютного давления p избыточное давление $p-p_\infty$; это можно сделать, так как дополнительные слагаемые, которые при этом появятся, равны нулю:

$$\oint_{(L)} p_\infty\cos\theta\,ds=0,\quad \oint_{(L)} p_\infty\sin\theta\,ds=0.$$

Таким образом, можно написать:

$$P_x=-\oint_{(L)}(p-p_\infty)\cos\theta\,ds,\quad P_y=-\oint_{(L)}(p-p_\infty)\sin\theta\,ds.$$

Избыточное давление, которое сюда входит, мы вычислим по уравнению Эйлера:

$$p-p_\infty=\frac{\rho V_\infty^2}{2}-\frac{\rho v^2}{2}=\frac{\rho V_\infty^2}{2}-\frac{\rho}{2}\left[(V_\infty+v'_x)^2+v_y'^2\right]=$$
$$=-\rho V_\infty v'_x-\frac{\rho}{2}(v_x'^2+v_y'^2).$$

Подставляя последнее выражение в формулы для P_x и P_y, получим:

$$P_x=\oint_{(L)}\rho\left(V_\infty v'_x\cos\theta+C\frac{1}{r^2}\right)ds,\quad P_y=\oint_{(L)}\rho\left(V_\infty v'_x\sin\theta+D\frac{1}{r^2}\right)ds,$$

где C и D суть коэффициенты пропорциональности при слагаемых имеющих порядок малости $1/r^2$.

Подставляя найденные выражения P_x, P_y, $\frac{dI_x}{dt}$ и $\frac{dI_y}{dt}$ в формулы (5.173), получим:

$$Q=-\rho V_\infty\oint_{(L)}(v'_x\cos\theta+v'_y\sin\theta)\,ds+\frac{\rho}{r}\int_0^{2\pi}(C-A)\,d\theta,$$

$$Y=\rho V_\infty\oint_{(L)}(v'_x\sin\theta-v'_y\sin\theta)\,ds+\frac{\rho}{r}\int_0^{2\pi}(D-B)\,d\theta.$$

Рассмотрим выражения, стоящие под знаками контурного интеграла. Так как $v'_x\cos\theta+v'_y\sin\theta$ представляет собою проекцию скорости $\boldsymbol{v}'$ на направление нормали к контрольной поверхности, то соответствующее подынтегральное выражение можно рассматривать как элементарный расход жидкости от потока возмущения через площадку $ds\cdot 1$, а контурный интеграл — как расход жидкости через всю контрольную поверхность. Но так как эта поверхность замкнута и внутри нее нет источников и стоков жидкости, то суммарный расход равен нулю. Следовательно,

$$Q=\frac{\rho}{r}\int_0^{2\pi}(C-A)\,d\theta. \tag{5.175}$$

Аналогично находим, что величина $v'_x\sin\theta - v'_y\cos\theta$ представляет собою проекцию скорости $\boldsymbol{v}'$ на направление касательной к окружности радиуса r и, следовательно, соответствующее подынтегральное выражение можно рассматривать как элементарную «работу» вектора скорости, а контурный интеграл — как циркуляцию скорости:

$$\oint_{(L)}(v'_x\sin\theta - v'_y\cos\theta)\,ds=\oint_{(L)}v'_s\,ds=\oint_{(L)}v_s\,ds=\Gamma;$$

(здесь v'_s под знаком контурного интеграла можно заменить на v_s, так как $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{V}_\infty+\boldsymbol{v}'$, а в прямолинейно-поступательном потоке циркуляция скорости по любому замкнутому контуру равна нулю). Таким образом,

$$Y=\rho V_\infty\Gamma+\frac{\rho}{r}\int_0^{2\pi}(D-B)\,d\theta. \tag{5.176}$$

Для того чтобы определить интегралы, входящие в формулы (5.175) и (5.176), не вычисляя при этом величин A, B, C, D, поступим так Устремим радиус контрольной поверхности r к бесконечности; тогда в пределе из формул (5.175) и (5.176) получим:

$$Q=0, \qquad Y=\rho V_\infty\Gamma. \tag{5.177}$$

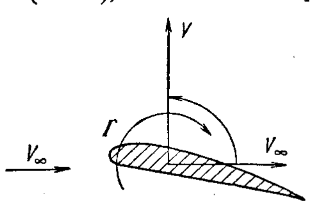

Рис. 5.112. Направление подъемной силы получается из направления вектора скорости набегающего потока поворотом его на прямой угол против циркуляции.

Но так как Q и Y не зависят от того, какова величина взятого нами радиуса контрольной поверхности, то ясно, что последние формулы могут иметь место лишь в том случае, если интегралы, входящие в формулы (5.175) и (5.176), тождественно равны нулю, т. е. если их величина одна и та же при $r=\infty$ и при любом конечном значении r.

Равенства (5.177) выражают *теорему Жуковского* о подъемной силе: *Если потенциальный установившийся поток несжимаемой жидкости обтекает бесконечно длинный цилиндр перпендикулярно к образующим, то на участок цилиндра, имеющий длину вдоль образующих, равную единице, действует сила, направленная перпен-*

дикулярно к скорости набегающего потока и равная произведению плотности жидкости на скорость потока на бесконечности и на циркуляцию скорости по любому замкнутому контуру, охватывающему обтекаемый цилиндр. Направление подъемной силы получается при этом из направления вектора скорости потока на бесконечности поворотом его на прямой угол против направления циркуляции (*рис.* 5.112).

§ 47. Значение теоремы Жуковского о подъемной силе. Выводы и следствия из этой теоремы

Теорема Жуковского имеет огромное принципиальное значение для понимания природы подъемной силы; она является также основой для построения всей теории крыла и гребного винта, и в этом состоит ее практическое значение. Мы рассмотрим теперь ряд выводов и следствий из этой теоремы, которые помогут выяснить ее значение.

Теорема Жуковского устанавливает, что при данных плотности жидкости и скорости набегающего потока подъемная сила определяется только величиной циркуляции скорости по контуру, охватывающему крыло. Отсюда следует, что при вычислении подъемной силы можно представить себе крыло замененным одним вихрем, или несколькими вихрями, которые, будучи неподвижно связаны с крылом, создают в потоке такую же циркуляцию скорости по всякому контуру, охватывающему крыло, какую в действительности создает само крыло. Такие вихри Жуковский назвал *присоединенными вихрями*, в отличие от свободных вихрей, которые перемещаются вместе с потоком. Идея замены крыла присоединенными (или несущими) вихрями, которая была впервые сформулирована и развита Жуковским на основе его теоремы, проходит красной нитью через всю теорию крыла и гребного винта.

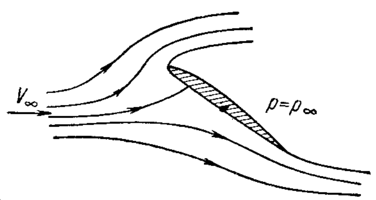

Рис. 5.113. Схема обтекания крыла по струйной теории.

Принципиальное значение теоремы Жуковского заключается далее в том, что она впервые установила ограниченность так называемого парадокса Даламбера, неправильное понимание которого сильно подрывало доверие практиков к выводам теории. Теорема Жуковского показывает, что причина несоответствия с действительностью парадокса Даламбера заключается в том, что им не учитываются вращения частиц, которые происходят от действия сил трения в непосредственной близости к поверхности тела, т. е. в пограничном слое.

С другой стороны, теорема Жуковского показывает, что не следует искать источник подъемной силы крыла и в срыве струй с передней и задней кромок крыла, и в образовании застойной области за крылом (рис. 5.113), как это предполагалось по струйной теории.