Теорема Жуковского позволяет также объяснить поперечные движения масс жидкости в турбулентном потоке; каждая такая масса, выделившись из окружающей среды и вращаясь, будет испытывать от набегающего на нее потока воздействие подъемной силы и вследствие этого будет удаляться от первоначального направления своего движения. Более подробно это явление будет рассмотрено в следующей главе.

Теорема Жуковского оставляет открытым вопрос о величине циркуляции скорости. Этот вопрос, строго говоря, и не может быть решен средствами теории идеальной жидкости. Так как циркуляция скорости в несжимаемой жидкости возникает только от действия сил вязкости, то вычислить ее можно лишь на основе учета этих сил, т. е. на основе теории движения вязкой жидкости. Чаплыгиным и Жуковским в то время, когда эта теория еще не была достаточно развитой, был предложен для вычисления циркуляции скорости замечательный по своей простоте и вместе с тем достаточно близкий к действительности *постулат*, который гласит, что *выходящая угловая точка на хвостике профиля является точкой схода струй с профиля*. Этот постулат, как доказывается в теории крыла, позволяет однозначно вычислить величину циркуляции скорости и таким образом является способом косвенного учета сил вязкости, вызывающих циркуляцию скорости вокруг крыла.

Теорема Жуковского и постулат Чаплыгина — Жуковского представляют собою первое по времени решение проблемы подъемной силы, которое положило начало всей современной аэродинамике.

§ 48. Обобщения теоремы Жуковского о подъемной силе

Теорема Жуковского была здесь доказана лишь для случая, когда тело движется в среде с постоянной по величине и направлению скоростью и с неизменной во времени циркуляцией скорости по всякому охватывающему тело контуру. В общем случае движения тела в жидкости циркуляция скорости вокруг него будет изменяться с течением времени. Теорема Жуковского была обобщена на случай произвольного движения крыла в идеальной несжимаемой жидкости Л. И. Седовым[1]). Необходимо отметить, что если циркуляция скорости по всякому контуру, охватывающему тело, переменна во времени, то поток *не может быть везде потенциальным*: он должен содержать отдельные или непрерывно распределенные вихри. В самом деле, как известно из предыдущего, циркуляция скорости вокруг крыла возникает в начальный период его движения в связи с образованием и отрывом разгонного вихря. При этом, по теореме Томсона, циркуляция скорости вокруг крыла в каждый момент движения должна быть равна по абсолютной величине циркуляции скорости вокруг разгонного вихря. Следовательно, если крыло движется произвольным образом и циркуляция скорости вокруг него изменяется, то так же будет изменяться и циркуляция скорости вокруг разгонных вихрей. При всяком изменении циркуляции вокруг крыла с его

---

[1]) Седов Л. И., К теории неустановившихся движений внутри жидкости, Труды ЦАГИ, вып. 229, 1935, см. также Седов Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, Гостехиздат, 1950.

задней кромки будут сбегать разгонные вихри; в зависимости от закона изменения по времени циркуляции вокруг крыла они могут представлять собой систему отдельных вихрей, или могут быть непрерывно распределенными вдоль линии, отходящей от задней кромки крыла. Всякий разгонный вихрь, отходящий от крыла перпендикулярно к его размаху, вызывает соответствующее изменение подъемной силы.

Поэтому, зная закон изменения по времени подъемной силы крыла, можно найти закон распределения погонной циркуляции в системе вихрей, сбегающих с крыла, и, наоборот, зная распределение циркуляции в вихрях, сбегающих с крыла, можно определить изменение подъемной силы крыла. Этим приемом широко пользуются при изучении колебаний крыла и вообще в теории неустановившихся движений крыла [1]).

При доказательстве теоремы Жуковского о подъемной силе предполагалось, что поток, в котором находится крыло, является плоским, вне крыла — безвихревым и на бесконечности — прямолинейно-поступательным. Эти предположения значительно ограничивают применение теоремы; в действительности поток, обтекающий крыло, является вихревым потоком (например, в области спутной струи за крылом), вблизи торцов крыла и в случае крыла малого удлинения его нельзя (даже приближенно) считать плоским потоком, а при анализе взаимного влияния частей самолета и в некоторых других вопросах приходится рассматривать крыло в условиях непрямолинейного потока. Можно обобщить теорему Жуковского на случай вихревого, пространственного и неоднородного потока, а также на случай движения крыла в сжимаемой среде [2]). Некоторые из этих обобщений мы вкратце изложим.

Рассмотрим сначала *плоский* установившийся поток несжимаемой жидкости, обтекающий профиль крыла и имеющий на бесконечности скорость V_∞. Предположим, что вне контура профиля существуют вихревые области. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы Жуковского, т. е. применяя теорему об изменении количества движения к жидкости, находящейся внутри цилиндрической контрольной поверхности с высотою, равной единице длины, получим, что подъемная сила, приходящаяся на единицу размаха крыла, равна

$$Y=\rho V_\infty \Gamma+\rho\oint\limits_{(L)}\left(\frac{v_x'^2-v_y'^2}{2}\,dx+v_x'v_y'\,dy\right), \tag{5.178}$$

где Γ есть циркуляция скорости по контуру (L) контрольной поверхности, а v_x' и v_y' — компоненты вдоль осей координат скорости возмущения, вызванной присутствием крыла. Положительным направлением обхода контура при вычислении интеграла считается здесь, как и при выводе теоремы Жуковского, направление, при котором область, ограниченная контуром, остается по правую сторону.

Если преобразовать контурный интеграл в двойной, распространенный на площадь S, ограниченную контуром L и контуром профиля, то выражение для Y примет вид

$$Y=\rho V_\infty \Gamma-\rho\int\limits_{(S)}\left[v_x'\left(\frac{\partial v_y'}{\partial x}-\frac{\partial v_x'}{\partial y}\right)+v_y'\left(\frac{\partial v_x'}{\partial x}+\frac{\partial v_y'}{\partial y}\right)\right]dS. \tag{5.179}$$

---

[1]) См. работы, указанные в предыдущей сноске, а также Некрасов А. И., Теория крыла в нестационарном потоке, Изд-во АН СССР, 1947.

[2]) Фабрикант Н. Я., Обобщения теоремы Жуковского о подъемной силе и некоторые их применения, Некоторые вопросы аэродинамики и динамики самолета, Труды Моск. авиац. технол. ин-та, Сборник № 42, Оборонгиз, 1959.

Так как в плоском потоке несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial v'_x}{\partial x} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} = 0,$$

то окончательно будем иметь:

$$Y = \rho V_\infty \Gamma - 2\rho \int\limits_{(S)} v'_x \omega_z \, dS,$$

где ω_z есть компонента угловой скорости вращения частицы жидкости.

Второе слагаемое в последней формуле, представляющее собой поправку к выражению подъемной силы, данному Жуковским, будет отлично от нуля лишь в том случае, если в потоке существует область с неравной нулю площадью, в которой движение является вихревым.

Следует иметь в виду, что при наличии вихрей в потоке, окружающем крыло, величина циркуляции Γ будет отличаться от циркуляции при безвихревом обтекании и будет разной для разных контуров, охватывающих крыло.

Рассмотрим теперь пространственный поток несжимаемой жидкости, обтекающий крыло, например вблизи его торца. Проведем две плоскости, параллельные плоскости симметрии крыла xy, отстоящие друг от друга на расстояние, равное dz. В слое между этими плоскостями выделим часть среды с помощью круговой цилиндрической поверхности, охватывающей крыло. Вычислим дополнительную подъемную силу, приходящуюся на единицу размаха крыла, которая возникает от поперечного перетекания жидкости, т. е. от течения вдоль оси z. По теореме импульсов можем написать, что подъемная сила элемента крыла, выделенного упомянутыми плоскостями, равна

$$dY = dP_y - dI_y,$$

где dP_y есть составляющая вдоль оси y силы давления внешней среды на контрольную поверхность, а dI_y — составляющая вдоль оси y изменения количества движения в единицу времени у выделенной части среды.

Так как

$$dP_y = -\oint\limits_{(L)} (p - p_\infty) \, dx,$$

а по уравнению Бернулли

$$p - p_\infty = -\frac{\rho}{2} (2V_\infty v'_x + v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z),$$

то составляющая dP_y/dz от поперечного перетекания равна

$$\left(\frac{dP_y}{dz}\right)_{\text{пер}} = \frac{\rho}{2} \oint\limits_{(L)} v'^2_z \, dx = \rho \int\limits_{(S)} v'_z \frac{\partial v'_z}{\partial y} dS.$$

Составляющая dI_y/dz, происходящая от поперечного перетекания, равна

$$\left(\frac{dI_y}{dz}\right)_{\text{пер}} = \rho \int\limits_{(S)} \frac{\partial}{\partial z} (v'_z v'_y) \, dS.$$

Таким образом,

$$\left(\frac{dY}{dz}\right)_{\text{пер}} = \rho \int\limits_{(S)} \left(v'_z \frac{\partial v'_z}{\partial y} - v'_z \frac{\partial v'_y}{\partial z} - v'_y \frac{\partial v'_z}{\partial z}\right) dS,$$

или иначе:

$$\left(\frac{dY}{dz}\right)_{\text{пер}} = \rho \int\limits_{(S)} \left(2v'_z \omega_x - v'_y \frac{\partial v'_z}{\partial z}\right) dS. \tag{5.180}$$

Эта формула дает поправку к величине погонной аэродинамической нагрузки, вычисленной по теории плоского обтекания. Следует, однако, отметить, что эта поправка будет не равна нулю лишь в том случае, если при вычислении нагрузок исходить не из плоской вихревой системы.

Полная погонная нагрузка в случае обтекания крыла пространственным потоком получится суммированием нагрузок, определяемых формулами (5.179) и (5.180):

$$\frac{dY}{dz}=\rho V_\infty\Gamma+2\rho\int\limits_{(S)}(v'_z\omega_x-v'_x\omega_z)\,dS-\int\limits_{(S)}v'_y\left(\frac{\partial v'_x}{\partial x}+\frac{\partial v'_y}{\partial y}+\frac{\partial v'_z}{\partial z}\right)dS.$$

Так как в несжимаемой среде $\operatorname{div}\bar{v}'=0$, то окончательно получим:

$$\frac{dY}{dz}=\rho V_\infty\Gamma+2\rho\int\limits_{(S)}(v'_z\omega_x-v'_x\omega_z)\,dS. \tag{5.181}$$

На случай обтекания крыла дозвуковым потоком газа теорему Жуковского обобщили М. В. Келдыш и Ф. И. Франкль [1]).

§ 49. Общие формулы Чаплыгина для аэродинамической силы и момента в плоском потоке идеальной несжимаемой жидкости

Вихри, образующиеся при движении тела в среде, являются причиной возникновения не только аэродинамической силы, определяемой теоремой Жуковского, но и аэродинамического момента. Для того чтобы вычислить аэродинамический момент, действующий на бесконечно длинное цилиндрическое тело, которое движется перпендикулярно к образующим, и найти соотношение между моментами и подъемной силой, нам нужно будет вывести общие формулы С. А. Чаплыгина для подъемной силы и аэродинамического момента [2]).

Мы будем предполагать, что жидкость идеальна и несжимаема, а ее течение является плоским. Плоское потенциальное движение идеальной несжимаемой жидкости полностью определяется, как известно из предыдущего (см. гл. IV, § 16), характеристической функцией потока $w=\varphi+i\psi$. Через характеристическую функцию могут быть выражены, как мы видели в гл. IV, все кинематические элементы потока (скорость, циркуляция скорости и т. д.). Выразим теперь через характеристическую функцию аэродинамические силы и моменты, действующие на тело. Представим себе с этой целью слой жидкости, ограниченный двумя плоскостями, параллельными плоскости течения xy и отстоящими друг от друга на расстояние, равное единице длины. Проведем мысленно в этом слое контрольную цилиндрическую

---

[1]) Келдыш М. В. и Франкль Ф. И., Внешняя задача Неймана для нелинейных эллиптических уравнений с приложением к теории крыла в сжимаемом газе, Изв. Академии наук СССР, вып. 4, 1934.

[2]) Чаплыгин С. А., О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела (к теории аэроплана), Собрание сочинений, т. II, изд. Академии наук СССР, 1933.