Эта формула дает поправку к величине погонной аэродинамической нагрузки, вычисленной по теории плоского обтекания. Следует, однако, отметить, что эта поправка будет не равна нулю лишь в том случае, если при вычислении нагрузок исходить не из плоской вихревой системы.

Полная погонная нагрузка в случае обтекания крыла пространственным потоком получится суммированием нагрузок, определяемых формулами (5.179) и (5.180):

$$\frac{dY}{dz}=\rho V_\infty\Gamma+2\rho\int\limits_{(S)}(v'_z\omega_x-v'_x\omega_z)\,dS-\int\limits_{(S)}v'_y\left(\frac{\partial v'_x}{\partial x}+\frac{\partial v'_y}{\partial y}+\frac{\partial v'_z}{\partial z}\right)dS.$$

Так как в несжимаемой среде $\operatorname{div}\bar v'=0$, то окончательно получим:

$$\frac{dY}{dz}=\rho V_\infty\Gamma+2\rho\int\limits_{(S)}(v'_z\omega_x-v'_x\omega_z)\,dS. \tag{5.181}$$

На случай обтекания крыла дозвуковым потоком газа теорему Жуковского обобщили М. В. Келдыш и Ф. И. Франкль [1]).

§ 49. Общие формулы Чаплыгина для аэродинамической силы и момента в плоском потоке идеальной несжимаемой жидкости

Вихри, образующиеся при движении тела в среде, являются причиной возникновения не только аэродинамической силы, определяемой теоремой Жуковского, но и аэродинамического момента. Для того чтобы вычислить аэродинамический момент, действующий на бесконечно длинное цилиндрическое тело, которое движется перпендикулярно к образующим, и найти соотношение между моментами и подъемной силой, нам нужно будет вывести общие формулы С. А. Чаплыгина для подъемной силы и аэродинамического момента [2]).

Мы будем предполагать, что жидкость идеальна и несжимаема, а ее течение является плоским. Плоское потенциальное движение идеальной несжимаемой жидкости полностью определяется, как известно из предыдущего (см. гл. IV, § 16), характеристической функцией потока $w=\varphi+i\psi$. Через характеристическую функцию могут быть выражены, как мы видели в гл. IV, все кинематические элементы потока (скорость, циркуляция скорости и т. д.). Выразим теперь через характеристическую функцию аэродинамические силы и моменты, действующие на тело. Представим себе с этой целью слой жидкости, ограниченный двумя плоскостями, параллельными плоскости течения xy и отстоящими друг от друга на расстояние, равное единице длины. Проведем мысленно в этом слое контрольную цилиндрическую

---

[1]) Келдыш М. В. и Франкль Ф. И., Внешняя задача Неймана для нелинейных эллиптических уравнений с приложением к теории крыла в сжимаемом газе, Изв. Академии наук СССР, вып. 4, 1934.

[2]) Чаплыгин С. А., О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела (к теории аэроплана), Собрание сочинений, т. II, изд. Академии наук СССР, 1933.

поверхность с образующими, перпендикулярными к плоскости xy; тело при этом предполагается находящимся внутри этой поверхности. Применим к жидкости, протекающей сквозь контрольную поверхность, теорему импульсов. Предполагая течение установившимся и рассуждая аналогично тому, как это делалось при выводе теоремы Н. Е. Жуковского о подъемной силе, получим следующие выражения для проекций аэродинамической силы X, Y на оси произвольно расположенной прямоугольной системы координат:

$$X+\oint\limits_{(L)} p\cos(\widehat{n, x})\,ds=-\oint\limits_{(L)} \rho v_x v_n\,ds,$$

$$Y+\oint\limits_{(L)} p\cos(\widehat{n, y})\,ds=-\oint\limits_{(L)} \rho v_y v_n\,ds.$$

Здесь интегрирование ведется по замкнутому контуру (L) поперечного разреза контрольной поверхности, через n обозначено направление внешней нормали к этому контуру, а через ds — элемент дуги контура. Положительным направлением обхода контура здесь считается направление, при котором область, ограниченная контуром, остается по правую сторону от контура. При этом условии

$$\cos(\widehat{n, x})\,ds=-dy, \qquad \cos(\widehat{n, y})\,ds=dx,$$
$$v_n ds=-v_x dy+v_y dx;$$

следовательно,

$$X=\oint\limits_{(L)} p\,dy+\oint\limits_{(L)} \rho v_x(v_x dy-v_y dx),$$

$$Y=-\oint\limits_{(L)} p\,dx+\oint\limits_{(L)} \rho v_y(v_x dy-v_y dx).$$

Так как движение потенциальное и установившееся, то по уравнению Эйлера имеем:

$$p+\frac{\rho v^2}{2}=\mathrm{const}$$

для всего потока. Следовательно,

$$\oint\limits_{(L)} p\,dy=\oint\limits_{(L)} \mathrm{const}\,dy-\frac{\rho}{2}\oint\limits_{(L)} v^2dy=-\frac{\rho}{2}\oint\limits_{(L)} v^2dy,$$

ибо

$$\oint\limits_{(L)} dy=0.$$

Аналогично находим:

$$\oint\limits_{(L)} p\,dx=\oint\limits_{(L)} \mathrm{const}\,dx-\frac{\rho}{2}\oint\limits_{(L)} v^2dx=-\frac{\rho}{2}\oint\limits_{(L)} v^2dx.$$

Формулы для X и Y теперь примут следующий вид:

$$X = \frac{\rho}{2} \oint\limits_{(L)} [(v_x^2 - v_y^2)\,dy - 2v_x v_y dx],$$

$$Y = \frac{\rho}{2} \oint\limits_{(L)} [2v_x v_y dy + (v_x^2 - v_y^2)\,dx].$$

Умножим обе части первого из этих равенств на i и сложим почленно со вторым; тогда получим:

$$Y + iX = \frac{\rho}{2} \oint\limits_{(L)} [v_x^2 (dx + i\,dy) - v_y^2 (dx + i\,dy) - 2iv_x v_y (dx + i\,dy)] =$$

$$= \frac{\rho}{2} \oint\limits_{(L)} (v_x^2 - 2iv_x v_y - v_y^2)(dx + i\,dy) = \frac{\rho}{2} \oint\limits_{(L)} (v_x - iv_y)^2 (dx + i\,dy).$$

Вспомним (гл. IV, § 16), что выражение $v_x - iv_y$ представляет собой комплексную скорость и равно производной по z от характеристической функции w; заменим, кроме того, $dx + idy$ на dz; тогда будем иметь:

$$Y + iX = \frac{\rho}{2} \oint\limits_{(L)} \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz. \tag{5.182}$$

Это равенство называется *формулой Чаплыгина для аэродинамической силы*, приходящейся на единицу размаха крыла в потоке идеальной несжимаемой жидкости.

Из формулы Чаплыгина непосредственно следует теорема Жуковского о подъемной силе.

Перейдем теперь к вычислению аэродинамического момента. Из вывода формулы (5.182) следует, что элементарная аэродинамическая сила, происходящая от количества движения, протекающего сквозь элемент контура (L), и от приложенных к этому элементу давлений, равна:

$$dY + i\,dX = \frac{\rho}{2} \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz.$$

Как известно из теоретической механики, момент силы относительно оси z выражается через проекции силы на оси x и y и координаты точки приложения силы следующим образом:

$$M = Yx - Xy.$$

Следовательно, элементарный аэродинамический момент dM_z равен

$$dM_z = x\,dY - y\,dX;$$

но dY представляет собою вещественную часть выражения $\rho/2\,(dw/dz)^2 dz$, а dX — мнимую часть того же выражения; аналогично x можно рассматривать как вещественную часть, а y — как мнимую часть z. Обозначив сокращенно вещественную часть буквами «в. ч.», а мнимую — буквами «м. ч.», сможем написать:

$$dM_z = \text{в. ч.}\left[\frac{\rho}{2}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz\right]\text{в. ч. } z - \text{м. ч.}\left[\frac{\rho}{2}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz\right]\text{м. ч. } z.$$

Как видно из последнего выражения, оно представляет собою вещественную часть произведения z на $\rho/2\,(dw/dz)^2\,dz$; в самом деле, вещественная часть произведения двух комплексных чисел $a+bi$ и $c+di$ равна $ac-bd$, т. е. построена по типу последнего выражения. Таким образом,

$$dM_z = \text{в. ч.}\left[\frac{\rho}{2}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 z\,dz\right].$$

Результирующий аэродинамический момент M_z получится интегрированием этого равенства по контуру (L):

$$M_z = \text{в. ч.}\left[\frac{\rho}{2}\oint_{(L)}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 z\,dz\right]. \tag{5.183}$$

Равенство (5.183) называется *формулой Чаплыгина для аэродинамического момента*, приходящегося на единицу размаха крыла в потоке идеальной несжимаемой жидкости. Формулы Чаплыгина (5.182) и (5.183) дают общие выражения аэродинамической силы и момента, действующих на тело, через характеристическую функцию потока.

§ 50. Теорема Чаплыгина об аэродинамическом моменте

Для дальнейшего удобно будет воспользоваться выражением комплексной скорости dw/dz в виде бесконечного степенного ряда. Как известно, всякая функция комплексного переменного $f(z)$, регулярная на всей плоскости, за исключением начала координат, может быть представлена в форме степенного ряда, содержащего как положительные, так и отрицательные степени z:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n z^n.$$

Однако, если $f(z)$ есть комплексная скорость, то ряд слагаемых в этом выражении отпадает. В самом деле, комплексная скорость должна удовлетворять условию на бесконечности, где она должна иметь конечный модуль. Это возможно лишь в том случае, если разложение dw/dz в степенной ряд не содержит слагаемых с положительными показателями степени у z. Таким образом, для dw/dz получается в общем случае следующее разложение:

$$\frac{dw}{dz} = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \ldots$$