значив сокращенно вещественную часть буквами «в. ч.», а мнимую — буквами «м. ч.», сможем написать:

$$dM_z = \text{в. ч.} \left[\frac{\rho}{2}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz\right] \text{в. ч. } z - \text{м. ч.} \left[\frac{\rho}{2}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz\right] \text{м. ч. } z.$$

Как видно из последнего выражения, оно представляет собою вещественную часть произведения $z$ на $\rho/2\,(dw/dz)^2\,dz$; в самом деле, вещественная часть произведения двух комплексных чисел $a + bi$ и $c + di$ равна $ac - bd$, т. е. построена по типу последнего выражения. Таким образом,

$$dM_z = \text{в. ч.} \left[\frac{\rho}{2}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 z\,dz\right].$$

Результирующий аэродинамический момент $M_z$ получится интегрированием этого равенства по контуру $(L)$:

$$M_z = \text{в. ч.} \left[\frac{\rho}{2} \oint\limits_{(L)} \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 z\,dz\right]. \tag{5.183}$$

Равенство (5.183) называется *формулой Чаплыгина для аэродинамического момента*, приходящегося на единицу размаха крыла в потоке идеальной несжимаемой жидкости. Формулы Чаплыгина (5.182) и (5.183) дают общие выражения аэродинамической силы и момента, действующих на тело, через характеристическую функцию потока.

## § 50. Теорема Чаплыгина об аэродинамическом моменте

Для дальнейшего удобно будет воспользоваться выражением комплексной скорости $dw/dz$ в виде бесконечного степенного ряда. Как известно, всякая функция комплексного переменного $f(z)$, регулярная на всей плоскости, за исключением начала координат, может быть представлена в форме степенного ряда, содержащего как положительные, так и отрицательные степени $z$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n z^n.$$

Однако, если $f(z)$ есть комплексная скорость, то ряд слагаемых в этом выражении отпадает. В самом деле, комплексная скорость должна удовлетворять условию на бесконечности, где она должна иметь конечный модуль. Это возможно лишь в том случае, если разложение $dw/dz$ в степенной ряд не содержит слагаемых с положительными показателями степени у $z$. Таким образом, для $dw/dz$ получается в общем случае следующее разложение:

$$\frac{dw}{dz} = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \ldots$$

Это выражение для $dw/dz$ позволяет весьма просто вычислять аэродинамические силы и моменты с помощью формул Чаплыгина.

Заметим, прежде всего, что при $z=\infty$ $dw/dz=a_0$, и так как на бесконечности $dw/dz$ должна представлять собой вектор, сопряженный с вектором скорости набегающего потока, то для $a_0$ получаем выражение

$$a_0 = V_\infty \cos\gamma - iV_\infty \sin\gamma = V_\infty e^{-i\gamma}, \tag{5.184}$$

где $\gamma$ есть угол, составляемый вектором $V_\infty$ с осью $x$.

Выразим теперь через коэффициенты $a_n$ подъемную силу и аэродинамический момент, действующие на тело. По формуле Чаплыгина для аэродинамической силы получаем:

$$Y + iX = \frac{\rho}{2}\oint_{(L)}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz = \frac{\rho}{2}\oint_{(L)}\left(a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \ldots\right)^2 dz.$$

Проинтегрируем этот ряд почленно; так как

$$\oint_{(L)}\frac{dz}{z^n} = 0, \quad \text{если} \quad n \neq 1,$$

то все слагаемые ряда, за исключением слагаемого, содержащего $z^{-1}$, после интегрирования дадут нули. Для вычисления интеграла от $z^{-1}$ возьмем в качестве контура $(L)$ окружность радиуса $r$ с центром в начале координат (величина интеграла не зависит от вида контура, если особая точка $z=0$ находится внутри контура); тогда будем иметь:

$$z = re^{i\theta}, \quad dz = re^{i\theta}\,d\theta,$$

$$\oint_{(L)}\frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} i\,d\theta = i2\pi.$$

Таким образом, вычисление аэродинамической силы по формуле Чаплыгина приводит к следующему простому результату:

$$Y + iX = \frac{\rho}{2}\,2a_0a_{-1}i2\pi = 2\pi i Ve^{-i\gamma}\rho a_{-1}. \tag{5.185}$$

Так как по теореме Жуковского при выбранной здесь системе координат имеют место равенства

$$Y = \rho V_\infty\Gamma\cos\gamma, \quad X = -\rho V_\infty\Gamma\sin\gamma,$$

то

$$Y + iX = \rho V_\infty\Gamma(\cos\gamma - i\sin\gamma) = \rho V_\infty\Gamma e^{-i\gamma}.$$

Сопоставляя это выражение для $Y+iX$ с предыдущим, находим:

$$a_1 = \frac{\Gamma}{2\pi i}, \tag{5.186}$$

Формулы (5.185) и (5.186) показывают, что вектор скорости набегающего потока определяется лишь первым коэффициентом в разложении $dw/dz$ в степенной ряд, а циркуляция скорости по контуру, охватывающему профиль, — лишь вторым коэффициентом. Иными словами, скорость набегающего потока и подъемная сила не зависят от остальных коэффициентов в разложении комплексной скорости в степенной ряд.

По формуле Чаплыгина для аэродинамического момента находим:

$$M_z = \text{в. ч.}\left[\frac{\rho}{2}\oint\limits_{(L)}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 z\,dz\right] = \text{в.ч.}\left[\frac{\rho}{2}\oint\limits_{(L)}\left(a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \ldots\right)^2 z\,dz\right].$$

Величина, отличная от нуля, получится здесь в результате интегрирования только тех слагаемых, которые содержат $z^{-1}$; этими слагаемыми под знаком интеграла являются

$$\frac{a_{-1}^2}{z} + \frac{2a_0a_{-2}}{z}.$$

После интегрирования, принимая во внимание, что $\oint\limits_{(L)}\frac{dz}{z} = 2\pi i$, будем иметь:

$$M_z = \text{в. ч.}\left[\pi\rho i\left(a_{-1}^2 + 2a_0a_{-2}\right)\right].$$

Как видно из формулы (5.186), $a_{-1}^2$ является вещественной величиной и, следовательно, $ia_{-1}^2$ — чисто мнимой; так как при вычислении $M_z$ следует взять лишь вещественную часть выражения в квадратных скобках, то первое слагаемое отпадает. Таким образом,

$$M_z = 2\pi\rho\ \text{в. ч.}\,(ia_0a_{-2}) = -2\pi\rho\ \text{м. ч.}\,(a_0a_{-2}),$$

и на основании формулы (5.184) будем иметь:

$$M_z = -2\pi\rho V_\infty\ \text{м. ч.}\,(e^{-i\gamma}a_{-2}). \tag{5.187}$$

Для упрощения последнего выражения предположим, что ось $x$ направлена вдоль вектора скорости набегающего потока; тогда $\gamma = 0$, $a_0 = V_\infty$, и мы получаем:

$$M_z = \text{в. ч.}\ (2\pi\rho V_\infty i a_{-2}) = -2\pi\rho V_\infty\ \text{м. ч.}\ a_{-2}. \tag{5.188}$$

Аэродинамический момент определяется, как видим, лишь мнимой частью коэффициента $a_{-2}$; он не зависит, следовательно, от остальных коэффициентов в разложении комплексной скорости в степенной ряд.

Выясним с помощью последних формул зависимость аэродинамического момента от угла атаки профиля цилиндрического тела. Применим с этой целью метод наложения потоков. Будем рассматривать поток, обтекающий профиль при заданном угле атаки, как результат наложения двух потоков: одного, направленного вдоль аэродинамической хорды профиля, и другого — перпендикулярного к этой хорде. В соответствии с этим представим комплексную скорость потока, обтекающего профиль в виде суммы комплексных скоростей двух упомянутых составляющих потоков:

$$\frac{dw}{dz}=\left(\frac{dw}{dz}\right)_1+\left(\frac{dw}{dz}\right)_2.$$

Каждый коэффициент в разложении $dw/dz$ в степенной ряд будет равен сумме коэффициентов с тем же индексом в разложениях $(dw/dz)_1$ и $(dw/dz)_2$; в частности,

$$a_{-2}=a_{-21}+a_{-22};$$

второй индекс означает здесь, что коэффициент относится к разложению в степенной ряд комплексной скорости соответственно первого и второго из накладываемых потоков. Обозначим аэродинамический угол атаки через $\alpha_a$; тогда продольная составляющая вектора скорости на бесконечности будет равна $V_\infty \cos\alpha_a$, а поперечная составляющая — $V_\infty \sin\alpha_a$. Если величины коэффициентов $a_n$, относящиеся к потоку со скоростью, равной единице, отмечать штрихом наверху, то сможем написать:

$$a_{-2}=a'_{-21}\,V_\infty\cos\alpha_a+a'_{-22}V_\infty\sin\alpha_a.$$

Систему координат представим себе неподвижно связанной с профилем; в этом случае величины $a'_{-21}$ и $a'_{-22}$ не зависят от угла атаки и полностью определяются формой профиля.

Направим ось $x$ вдоль аэродинамической хорды профиля; тогда получаем по формуле (5.187), полагая в ней $\gamma=\alpha_a$:

$$M_z=-2\pi\rho V_\infty\ \text{м. ч.}\ [a_{-2}(\cos\alpha_a-i\sin\alpha_a)]=$$
$$=-2\pi\rho V_\infty^2\ \text{м. ч.}\ [(a'_{-21}\cos\alpha_a-a'_{-22}\sin\alpha_a)(\cos\alpha_a-i\sin\alpha_a)].$$

После раскрытия скобок будем иметь:

$$M_z=-\pi\rho V_\infty^2\,[(\text{м. ч.}\ a'_{-22}-\text{в. ч.}\ a'_{-21})\sin 2\alpha_a+$$
$$+(\text{м. ч.}\ a'_{-21}+\text{в. ч.}\ a'_{-22})\cos 2\alpha_a+(\text{м. ч.}\ a'_{-21}-\text{в. ч.}\ a'_{-22})].$$

Если обозначить для сокращения письма выражения в круглых скобках соответственно через $-A$, $-B$, $-C$, то окончательно получим:

$$M_z=\pi\rho V_\infty^2(A\sin 2\alpha_a+B\cos 2\alpha_a+C). \qquad (5.189)$$

Эта формула, впервые выведенная С. А. Чаплыгиным [1]), устанавливает зависимость аэродинамического момента профиля от угла атаки. С помощью этой формулы может быть найдено соотношение между подъемной силой и аэродинамическим моментом профиля, которое играет важную роль в расчете продольной устойчивости самолета.

[1]) Чаплыгин С. А., К общей теории крыла аэроплана, Полное собрание сочинений, т. II, изд. Академии наук СССР, 1933.

Выразим сначала подъемную силу через аэродинамический угол атаки, для чего опять применим метод наложения потоков. Рассматривая поток, обтекающий профиль под углом атаки, как результат наложения потока, направленного вдоль аэродинамической хорды, на поток, направленный перпендикулярно к аэродинамической хорде, сможем написать для коэффициента $a_{-1}$, определяющего подъемную силу, соотношение, аналогичное написанному выше для коэффициента $a_{-2}$:

$$a_{-1}=a_{-11}+a_{-12};$$

здесь $a_{-11}$ есть коэффициент, относящийся к разложению комплексной скорости продольного потока, а $a_{-12}$ — коэффициент, относящийся к разложению комплексной скорости поперечного потока[1]). Если ввести, кроме того, коэффициенты $a'_{-11}$ и $a'_{-12}$, относящиеся к соответствующему потоку с единичной скоростью, то будем иметь:

$$a_{-1}=a'_{-11}V_\infty\cos\alpha_a+a'_{-12}V_\infty\sin\alpha_a.$$

Так как при потоке, направленном вдоль аэродинамической хорды, подъемная сила, а следовательно, и циркуляция скорости по контуру, охватывающему профиль, равны нулю, то, как видно из формулы (5.186), $a_{-11}=0$. Подъемная сила, определяемая формулой (5.185), может быть поэтому представлена в виде

$$Y+iX=2\pi\rho V_\infty^2 ie^{-i\gamma}a'_{-12}\sin\alpha_a.$$

Если положить здесь, для упрощения, $\gamma=0$, то получим:

$$Y=2\pi\rho V_\infty^2 ia'_{-12}\sin\alpha_a. \tag{5.190}$$

Таким образом, мы видим, что *подъемная сила пропорциональна синусу аэродинамического угла атаки.*

Вернемся теперь к формуле (5.189) для аэродинамического момента. Если поток направлен вдоль аэродинамической хорды, то, по определению этой хорды, подъемная сила равна нулю; силы давления потока на крыло приводятся в этом случае к паре сил. Момент этой пары $M_{z0}$ определится по формуле (5.189), если положить в ней $\alpha_0=0$:

$$M_{z0}=\pi\rho V_\infty^2(B+C). \tag{5.191}$$

Вычитая это равенство из равенства (5.189), получим:

$$M_z-M_{z0}=\pi\rho V_\infty^2[A\sin 2\alpha_a-B(1-\cos 2\alpha_a)]=$$
$$=2\pi\rho V_\infty^2(A\cos\alpha_a-B\sin\alpha_a)\sin\alpha_a.$$

[1]) При этом мы предполагаем, что в каждом из накладываемых потоков циркуляция скорости по контуру, охватывающему профиль, выбирается так, что выполняется условие Чаплыгина — Жуковского о точке схода струй с контура. Если это условие выполнено в каждом из накладываемых потоков, то оно будет иметь место и в результирующем, т. е. угловая точка или точка заострения на хвостике профиля будет являться и точкой схода струй.

Будем рассматривать $M_z - M_{z0}$ как момент подъемной силы и найдем при этом условии величину ее плеча $l$; деля последнее равенство на $Y$ (формула (5.190)), будем иметь:

$$l = \frac{M_z - M_{z0}}{Y} = \frac{1}{ia'_{-12}}(A\cos\alpha_a - B\sin\alpha_a) = A'\cos\alpha_a - B'\sin\alpha_a, \tag{5.192}$$

где

$$A' = \frac{A}{ia'_{-12}}, \qquad B' = \frac{B}{ia'_{-12}}.$$

Выражение (5.192) показывает, что если взять точку с координатами $A'$ и $-B'$ (рис. 5.115), то $l$ можно рассматривать как сумму проекций этих координат на направление набегающего потока. Следовательно, линия действия подъемной силы, перпендикулярная к направлению

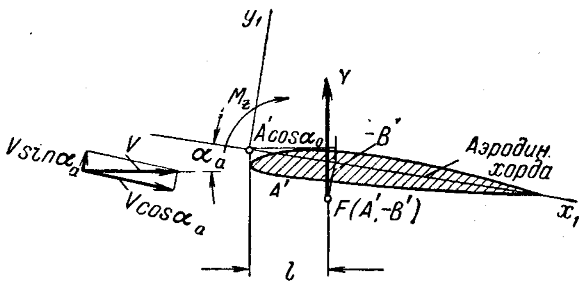


Рис. 5.115. К доказательству теоремы Чаплыгина.

набегающего потока, при всяком значении $\alpha_a$ пройдет через фиксированную точку $A'$, $-B'$; эта точка называется *фокусом профиля*. Мы приходим, таким образом, к следующей замечательной теореме Чаплыгина:

*Если плоский потенциальный установившийся поток несжимаемой жидкости обтекает тело, то силы давления жидкости на тело могут быть приведены к равнодействующей подъемной силе $Y$, проходящей при всех углах атаки через постоянную точку (фокус профиля), и к паре сил с постоянным при всех углах атаки моментом $M_{z0}$.*

Эта теорема Чаплыгина полностью определяет пучок аэродинамических сил, действующих на крыло при разных углах атаки, и позволяет, в частности, вычислить местоположение линии действия аэродинамической силы. Теорема Чаплыгина определяет также аэродинамический момент при разных углах атаки и в связи с этим играет важную роль в исследовании устойчивости крыла.

Из теоремы Чаплыгина следует, что если вычислить аэродинамический момент тела относительно оси, проходящей через фокус, то этот момент будет при всех углах атаки постоянной величиной, равной $M_{z0}$, и наоборот, если существует точка, момент относительно которой постоянен при всех углах атаки, то эта точка является фокусом. Таким образом, можно определить фокус крыла как точку, аэродинамический момент относительно которой есть величина постоянная при всех углах атаки.

Из теоремы Чаплыгина следует далее, что аэродинамический момент крыла равен

$$M_z = M_{z0} - lY.$$

Переходя здесь от аэродинамических сил и моментов к безразмерным коэффициентам, получим:

$$m_z = m_{z0} - \bar{l}c_y, \tag{5.193}$$

где $\bar{l} = l/b$. Коэффициент $m_{z0}$ представляет собою коэффициент аэродинамического момента в случае, когда $c_y = 0$, т. е. когда угол атаки равен углу пикирования.

При малых аэродинамических углах атаки, когда можно приближенно считать, что $\sin \alpha_a \approx \alpha_a$, $\cos \alpha_a \approx 1$, формула для $l$ принимает вид

$$l \approx A' - B'\alpha.$$

Ввиду того, что $A'$ значительно больше по абсолютной величине, нежели $-B'$, вторым слагаемым здесь можно пренебречь, и тогда получим:

$$l \approx A' = \text{const}.$$

Таким образом, плечо подъемной силы $l$ можно приближенно считать постоянным при всех малых углах атаки. Обозначив $A'/b$ через $n$, будем иметь вместо точной формулы (5.193) следующую приближенную формулу:

$$m_z = m_{z0} - nc_y, \tag{5.194}$$

где $n$ есть величина постоянная для данного тела. Из этого равенства следует, что при малых углах атаки между коэффициентом аэродинамического момента и коэффициентом подъемной силы имеет место линейная зависимость. Результаты опытов подтверждают этот теоретический вывод для всех углов атаки, при которых поток обтекает тело плавно, без отрыва пограничного слоя.