можно наблюдать, что сначала с увеличением напора скорость истечения увеличивается и струя из трубки бьет все дальше и дальше. Но, если, поднимая бак, достигнуть высоты, при которой ламинарное течение в трубке переходит в турбулентное, то струя начинает пульсировать и при дальнейшем увеличении напора расстояние, на которое бьет струя, уменьшается. Это свидетельствует о том, что потери на трение увеличились вследствие смены ламинарного режима течения турбулентным.

Однако в некоторых случаях, как увидим в дальнейшем, влияние турбулентности потока в известном смысле слова обратно. Так, например, для неудобообтекаемых тел при переходе от ламинарного движения к турбулентному точка отрыва вихрей сдвигается в направлении потока и обтекание улучшается. Искусственно турбулизируя поток, можно, например, уменьшить сопротивление шара более чем в два раза. Положительную роль играет турбулентность также в вопросах теплоотдачи от нагретой поверхности в жидкую среду: благодаря перемешиванию жидких масс теплоотдача в турбулентном потоке значительно превосходит теплоотдачу в ламинарном. Наоборот, турбулентность невыгодна, если мы заинтересованы в уменьшении нагрева тел жидкостью или газом (например, аэродинамического нагрева при полете с большой скоростью). Все это показывает, какое огромное значение имеет в технических вопросах проблема турбулентности и насколько важно для инженера умение использовать свойства ламинарного и турбулентного движений и управлять переходом от одного из них к другому.

§ 2. Ламинарное движение жидкости в круглой цилиндрической трубе

Установим сначала некоторые зависимости, общие для всякого (как ламинарного, так и турбулентного) движения жидкости в круглой цилиндрической трубе. Рассмотрим участок трубы, находящийся на большом расстоянии от места входа в трубу; предположим, что это расстояние такое, что во всех поперечных сечениях рассматриваемого участка движение одинаково (одинаковы касательные напряжения, распределение скоростей и т. д.). Иными словами, это означает, что в рассматриваемом участке v и τ не зависят от x, а являются функциями лишь от r: $v = f(r)$, $\tau = F(r)$. Проведем два поперечных сечения (рис. 6.4) на расстоянии L друг от друга. Так как распределение скоростей в обоих сечениях, по предположению, одинаково, то частицы жидкости, переходя от первого сечения ко второму, не испытывают ускорения. Поэтому можно считать, что силы, приложенные к объему, который выделен сечениями *1* и *2*, находятся в равновесии. Запишем сначала уравнение равновесия для всего объема жидкости, который заключен между сечениями *1* и *2*. Проектируя силы на ось трубы, получаем:

$$(p_1 - p_2)\frac{\pi d^2}{4} - \tau_0 \pi\, dL = 0,$$

откуда

$$p_1 - p_2 = 4\frac{\tau_0 L}{d}. \tag{6.1}$$

Из этого уравнения заключаем, что давление убывает вдоль трубы по линейному закону, причем перепад давления $p_1 - p_2$ пропорционален касательному напряжению τ_0 на поверхности стенки и обратно пропорционален диаметру трубы d. Заметим, что отношение

$$\frac{p_1 - p_2}{L} = 4\frac{\tau_0}{d}$$

есть величина постоянная вдоль трубы.

Запишем теперь уравнение равновесия для объема жидкости, который заштрихован на рис. 6.4. Этот объем ограничен сечениями *1* и *2*

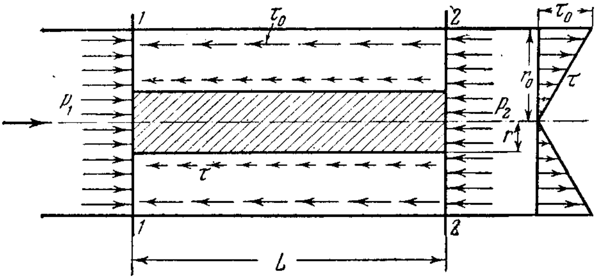

Рис. 6.4. К выводу соотношения между нормальными и касательными напряжениями при течении жидкости по цилиндрической трубе.

и боковой поверхностью цилиндра, ось которого совпадает с осью трубы, а радиус равен r $(r < d/2)$. Проектируя силы на ось трубы, имеем:

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 - \tau L 2\pi r = 0,$$

откуда

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{L}\frac{r}{2}. \tag{6.2}$$

Из последнего равенства видно, что при течении по трубе касательное напряжение изменяется по сечению трубы по линейному закону; оно равно нулю на оси трубы и принимает максимальное значение τ_0 на стенке.

Предположим теперь, что движение ламинарно. При ламинарном движении касательное напряжение по закону Ньютона равно

$$\tau = \mu\frac{\partial v}{\partial n}.$$

В данном случае нормалью к боковой поверхности выделенного цилиндра является радиус r, и так как v зависит только от r, то вместо частной производной здесь можно писать обыкновенную:

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dr}$$

(знак минус берется потому, что τ — величина положительная, а dv/dr при выбранной нами системе координат — отрицательная). Подставляя последнее выражение вместо τ в равенство (6.2), получим:

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{p_1 - p_2}{L} \frac{r}{2\mu}.$$

Интегрируя это уравнение, находим распределение скоростей по сечению трубы при ламинарном движении:

$$v = -\frac{p_1 - p_2}{L} \frac{r^2}{4\mu} + C.$$

На стенках трубы при движении вязкой жидкости скорость должна равняться нулю; обозначив радиус трубы через r_0, можем записать: при $r = r_0$ $v = 0$; отсюда

$$C = \frac{p_1 - p_2}{L} \frac{r_0^2}{4\mu}.$$

Формула для распределения скоростей по сечению трубы принимает после подстановки этого значения C следующий вид:

$$v = \frac{p_1 - p_2}{L} \frac{1}{4\mu} (r_0^2 - r^2). \tag{6.3}$$

Таким образом, скорость распределена по сечению трубы по параболическому закону[1]). Максимальное значение скорости найдем, подставляя в последнюю формулу $r = 0$:

$$v_{\text{макс}} = \frac{p_1 - p_2}{L} \frac{r_0^2}{4\mu}.$$

Перейдем теперь к определению потерь на трение; давление, потерянное в трубе на трение, определяется, как известно (гл. II, § 15), формулой

$$p_1 - p_2 = \lambda \frac{\rho v_{\text{ср}}^2}{2} \frac{L}{d}, \tag{6.4}$$

где $v_{\text{ср}}$ есть средняя по сечению скорость, d — диаметр, а λ — коэффициент сопротивления трубы. Для того чтобы найти величину $v_{\text{ср}}$,

[1]) В § 4 гл. IV было установлено (пример 2), что при таком законе распределения скоростей по сечению все частицы вращаются. Следовательно, ламинарное движение по круглой, цилиндрической трубе есть движение с вращением частиц.

а затем и λ, вычислим предварительно секундный расход жидкости по трубе Q. Представим себе в плоскости поперечного сечения трубы две концентрические окружности с центром на оси и радиусами r и $r+dr$. Сквозь ограниченную ими кольцевую полоску шириною dr протекает за единицу времени объем жидкости, равный

$$dQ = v 2\pi r\, dr.$$

Расход жидкости через все поперечное сечение при распределении скорости по формуле (6.3) равен

$$Q = 2\pi \int_0^{r_0} vr\, dr = \frac{p_1 - p_2}{L} \frac{\pi}{2\mu} \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2)\, r\, dr = \frac{p_1 - p_2}{L} \frac{\pi}{8\mu} r_0^4.$$

Разделив это выражение на величину площади поперечного сечения трубы, получим среднюю по сечению скорость $v_{\text{ср}}$:

$$v_{\text{ср}} = \frac{Q}{\pi r_0^2} = \frac{p_1 - p_2}{L} \frac{r_0^2}{8\mu}.$$

Отсюда, между прочим, видно, что средняя по сечению скорость в два раза меньше максимальной. Из последних равенств следует, что давление, потерянное на трение, равно

$$p_1 - p_2 = \frac{8\mu Q L}{\pi r_0^4}, \tag{6.5}$$

или, иначе,

$$p_1 - p_2 = \frac{8\mu v_{\text{ср}} L}{r_0^2}. \tag{6.6}$$

Равенство (6.5) выражает так называемый закон Пуазейля: *разность давлений, необходимая для того, чтобы через сечение трубы проходило в единицу времени заданное количество жидкости Q, при ламинарном течении пропорциональна длине трубы, вязкости жидкости и обратно пропорциональна четвертой степени диаметра.*

Этот закон был открыт экспериментальным путем французским врачом Пуазейлем (в 1840—1841), который занимался вопросом о движении крови в кровеносной системе.

Закон Пуазейля указывает весьма простой способ экспериментального определения вязкости. Достаточно измерить разность давлений в двух сечениях трубы и расход протекающей по трубе жидкости, и тогда формула (6.5) позволяет определить коэффициент вязкости μ, если известны диаметр трубы и расстояние между сечениями.

Вычислим теперь коэффициент сопротивления трубы λ, соответствующий движению по закону Пуазейля. С этой целью воспользуемся формулами (6.4) и (6.6):

$$\lambda = \frac{p_1 - p_2}{\frac{\rho v_{\text{ср}}^2}{2} \frac{L}{d}} = \frac{32\mu v_{\text{ср}} L}{d^2 \frac{\rho v_{\text{ср}}^2}{2} \frac{L}{d}} = \frac{64\mu}{\rho v_{\text{ср}} d},$$

или, иначе:

$$\lambda = \frac{64}{\mathrm{R}}, \tag{6.7}$$

где через R обозначено число Рейнольдса, в котором в качестве характерной длины принят диаметр трубы d, а в качестве характерной скорости — средняя по сечению скорость $v_{\text{ср}}$:

$$\mathrm{R} = \frac{v_{\text{ср}} d}{\nu}.$$

Таким образом, при течении по закону Пуазейля коэффициент сопротивления трубы обратно пропорционален числу Рейнольдса; сопротивление же трубы при этом пропорционально первой степени скорости (а не второй, как следовало бы по квадратичному закону).

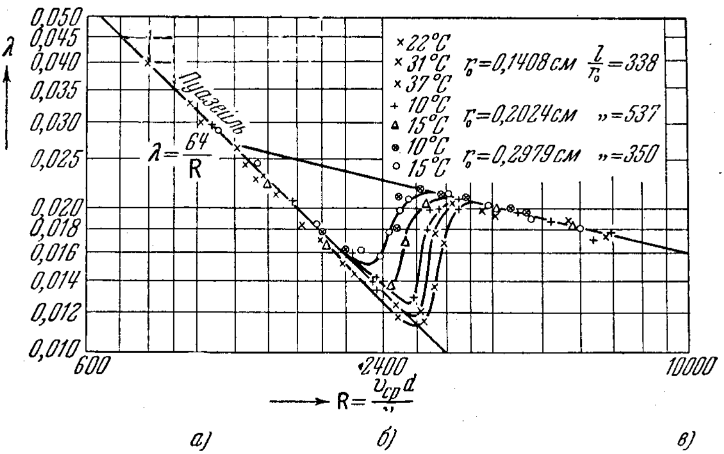

Рис. 6.5. Зависимость коэффициента сопротивления гладкой трубы от числа Рейнольдса: *а*) область ламинарного течения; *б*) переходная область; *в*) область турбулентного течения.

Графически λ как функция R изобразится в данном случае равнобочной гиперболой. Однако обычно зависимости коэффициентов сопротивления от чисел Рейнольдса изображаются на графиках в логарифмических масштабах; это значит, что по осям координат откладываются значения соответственно $\lg \lambda$ и $\lg \mathrm{R}$ (надписываются же при этом иногда числа, иногда их логарифмы). В логарифмических масштабах формула (6.7) изобразится прямой линией, ибо, как вытекает из этой формулы,

$$\lg \lambda = \lg 64 - \lg \mathrm{R}.$$

Эта прямая представлена на рис. 6.5; там же нанесены и экспериментальные точки. Из графика видно, что при малых значениях числа Рейнольдса до значения, приблизительно равного 2300, экспериментальные точки очень хорошо соответствуют формуле (6.7). При дальнейшем возрастании числа Рейнольдса коэффициент сопротивления трубы резко увеличивается и затем при турбулентном движении следует иному закону, нежели закон Пуазейля.

Заметим, что, как видно из графика, каждому критическому значению числа Рейнольдса соответствует своя переходная кривая, по которой совершается переброс экспериментальных точек при переходе от ламинарного режима движения к турбулентному.

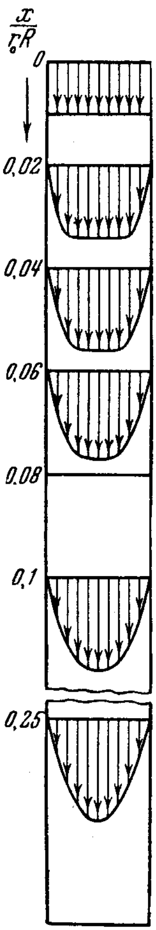

Рис. 6.6. Распределение скоростей в разгонном участке трубы.

§ 3. Ламинарное движение в разгонном участке трубопровода

Мы предполагали до сих пор, что во всех поперечных сечениях трубы распределение скоростей одинаково. Это возможно лишь в том случае, когда труба весьма длинна, теоретически говоря, бесконечно длинна. Для труб конечной длины выводы, которые были до сих пор сделаны, применимы лишь к участкам, находящимся на большом расстоянии от места входа в трубу. Параболический закон распределения скоростей на самом деле следует рассматривать лишь как закон асимптотический, т. е. такой, который тем ближе к действительности, чем дальше находится взятое сечение от места входа в трубу.

Участок трубы от места входа жидкости до того сечения, в котором можно считать с определенной допустимой погрешностью (например, в 1%), что скорость распределена по параболическому закону, называется *начальным* или *разгонным* участком.

Эксперименты показывают, что если жидкость поступает в трубу из резервуара, размеры которого достаточно велики по сравнению с размерами трубы, и если вход в трубу плавно закруглен, так чтобы не было возмущений потока, то во входном сечении скорость во всех точках постоянна. Отсюда можно заключить, что влияние вязкости на распределение скоростей во входном сечении отсутствует. По мере продвижения жидкости вдоль трубы слои, прилегающие к стенкам, затормаживаются. Вследствие влияния вязкости образуется пограничный слой, который нарастает в направлении движения вплоть до конечного сечения разгонного участка, где границы слоя смыкаются; за разгонным участком пограничный слой заполняет всю трубу. Для иллюстрации изложенного на рис. 6.6 представлено распределение скоростей в разгонном участке по результатам измерений Никурадзе.

Таким образом, в пределах разгонного участка влияние вязкости распространяется не на все поперечное сечение, а лишь на часть его, прилежащую к стенкам. В каждом сечении этого участка имеется как бы ядро с постоянной скоростью течения, на которое не распространяется влияние вязкости; жидкость здесь можно считать идеальной. Скорость в ядре течения по мере удаления от входа увеличивается, и следовательно, давление падает (по закону Бернулли для идеальной жидкости). Увеличение скорости здесь происходит потому, что вне ядра, в пограничном слое, скорость по мере удаления от входа убывает, а средняя по