разгонного участка, дают в достаточно хорошем согласии с экспериментом следующую формулу:

$$p_0 - p_2 = \frac{64}{R} \frac{\rho v_{\text{ср}}^2}{2} \frac{L}{d} + 2{,}41 \frac{\rho v_{\text{ср}}^2}{2}.$$

Длина разгонного участка также может быть определена теоретически[1]). Вычисления, основанные на теории пограничного слоя, показывают, что длину разгонного участка можно приближенно считать равной

$$x = 0{,}0575\, r_0\, \mathsf{R}.$$

Если, например, радиус трубы равен 1 *см*, а число Рейнольдса $\mathsf{R} = 2000$, то течение Пуазейля с параболическим распределением скоростей будет иметь место лишь за сечением, находящимся на расстоянии $x = 115$ *см* от входа жидкости в трубу; длина разгонного участка здесь равна примерно 58 диаметрам трубы.

§ 4. Основные понятия теории турбулентного движения. Условие подобия турбулентных потоков

Характерная особенность турбулентного движения состоит в том, как уже указывалось в § 1, что это движение является неустановившимся. В каждой точке турбулентного потока скорость непрерывно изменяется с течением времени. Следует подчеркнуть, что это изменение не периодическое и вообще не подчиненное каким-либо видимым закономерностям.

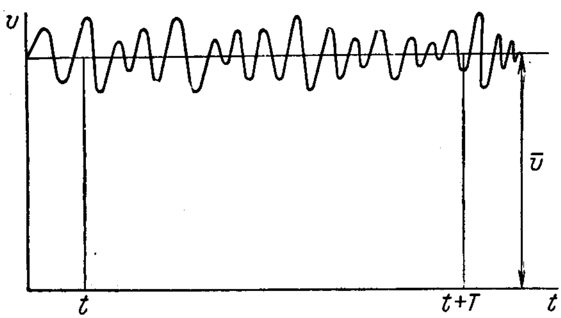

Рис. 6.7. Изменение скорости с течением времени в какой-либо точке турбулентного потока.

Типичная кривая изменения скорости в данной точке с течением времени представлена на рис. 6.7. Здесь ясно видны характерные для турбулентного потока пульсации скорости. Наличие этих пульсаций весьма осложняет исследование турбулентного движения.

Однако для практических целей обычно нет надобности знать величину мгновенной скорости и мгновенного давления. В расчетах обычно пользуются средними (по времени) величинами скоростей,

---

[1]) См. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости, под ред. Гольдштейна, т. I, ИЛ, 1948.

давлений и касательных напряжений. Поэтому и в теории турбулентного движения рассматривают вместо фактических скоростей, давлений и т. д. их средние (по времени), сглаженные (или, как говорят, *осредненные*) значения. Изучение неустановившегося движения, таким образом, сводится к изучению движения установившегося и это значительно упрощает исследование.

Будем обозначать осредненные по времени значения величин теми же буквами, что и фактические их значения, но с чертой наверху. Дадим математическое определение осредненной по времени величины.

Пусть $(t,\ t+T)$ будет некоторый достаточно большой промежуток времени, v_x, v_y, v_z — составляющие фактической скорости в данной точке. Составляющие осредненной скорости в той же точке определяются следующими равенствами:

$$\bar{v}_x = \frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} v_x dt; \quad \bar{v}_y = \frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} v_y dt; \quad \bar{v}_z = \frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} v_z dt.$$

Графически осредненная скорость определится, как ордината прямой линии на рис. 6.7, проведенной параллельно оси абсцисс так, что ограниченная ею площадь между крайними ординатами t и $t+T$ равна площади между теми же ординатами, ограниченной кривой изменения скорости по времени.

Аналогично, если p есть фактическое давление в данной точке, то осредненное давление в той же точке определяется формулой

$$\bar{p} = \frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} p\, dt.$$

Пользуясь понятиями осредненной скорости и давления, можно записать фактические скорости и давления в виде суммы осредненных величин и переменных по времени слагаемых, которые называются *пульсационными* скоростями и давлениями:

$$v_x = \bar{v}_x + v'_x, \quad v_y = \bar{v}_y + v'_y, \quad v_z = \bar{v}_z + v'_z, \quad p = \bar{p} + p',$$

где буквами v и p со штрихом обозначены пульсационные скорости и давления.

Из последних равенств вытекает, что осредненное значение пульсационной величины равно нулю. В самом деле, интегрируя почленно по t в промежутке $(t,\ t+T)$, например, первое из этих равенств и деля его затем на T, получим:

$$\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} v_x dt = \frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} \bar{v}_x dt + \frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} v'_x dt = \bar{v}_x + \frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} v'_x dt.$$

Но так как по определению левая часть есть $\bar{v}_x$, то из последнего равенства следует:

$$\int_t^{t+T} v'_x dt = 0.$$

Наличие пульсационных скоростей в турбулентном потоке приводит к дополнительным нормальным и касательным напряжениям. Докажем это для простейшего случая, когда осредненный поток имеет во всех точках одно и то же направление, например вдоль оси x.

Представим себе элементарную площадку dS, параллельную плоскости xz, и подсчитаем количество движения, которое протекает в единицу времени сквозь эту площадку. Если бы поток был ламинарный, то никакого движения жидкости перпендикулярно к площадке не было бы (за исключением молекулярного движения). Однако в турбулентном потоке, вследствие наличия пульсационной скорости, жидкие массы будут двигаться во всех направлениях, в том числе и перпендикулярно к площадке dS, и будут переносить с собой сквозь эту площадку определенное количество движения. Расход жидкости сквозь площадку dS можно выразить в виде произведения $\rho v'_y dS$. Количество движения, которое переносит с собой эта масса, равно

$$\rho\, dSv'_y\boldsymbol{v} = \rho\, dSv'_y(\bar{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{v}').$$

Вследствие переноса количества движения возникает сила, приложенная к площадке и численно равная изменению количества движения. Так как при положительном значении компоненты v'_y изменение количества движения для части жидкости, расположенной ниже площадки dS, будет по знаку отрицательным, а для части жидкости, расположенной выше площадки dS, — положительным, то с нижней стороны на площадку будет действовать сила, равная $-\rho v'_y\, dS(\bar{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{v}')$, а с верхней стороны — сила, равная $\rho v'_y dS(\bar{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{v}')$.

Мы рассмотрим первую из этих сил (это соответствует тому, что площадка dS представляет собой нижнюю грань параллелепипеда, выделенного в жидкости, и речь идет об определении поверхностной силы, действующей на эту грань); отнеся силу к единице площади, на которую она действует, получим, что напряжение, происходящее от пульсационных скоростей, равно

$$\boldsymbol{r} = -\rho v'_y(\bar{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{v}').$$

Обозначим проекции этого напряжения на оси координат x, y, z соответственно через τ_{xy}, p_{yy}, τ_{yz} (первый индекс указывает, что площадка, к которой приложено напряжение, перпендикулярна к оси y, второй индекс указыват ось, вдоль которой направлена составляющая напряжения; буква τ обозначает касательное напряжение, буква p — нормальное). Эти проекции равны

$$\tau_{yx} = -\rho v'_y(\bar{v}_x + v'_x), \quad p_{yy} = -\rho v'_y v'_y, \quad \tau_{yz} = -\rho v'_y v'_z.$$

Осредняя последние выражения и принимая во внимание, что осредненное значение пульсационной скорости равно нулю, получим:

$$\bar{\tau}_{yx} = -\rho\overline{v'_y v'_x}, \quad \bar{p}_{yy} = -\rho\overline{v'_y v'_y}, \quad \bar{\tau}_{yz} = -\rho\overline{v'_y v'_z}. \tag{6.8}$$

Аналогично, рассматривая элементарные площадки, параллельные другим координатным плоскостям, можно вычислить напряжения, происходящие от пульсационных скоростей и приложенные к этим площадкам.

Наличие в турбулентном потоке дополнительных напряжений выдвигает дополнительное условие подобия. Для того чтобы вывести это условие, представим себе элемент жидкости в форме параллелепипеда с ребрами, соответственно равными Δx, Δy, Δz. К нижней его грани приложена направленная вдоль оси x сила трения, происходящая от турбулентности потока, равная $-\bar{\tau}_{yx}\,\Delta x\,\Delta z$. К верхней грани приложена одноименная сила трения, равная $(\bar{\tau}_{yx} + \Delta\bar{\tau}_{yx})\,\Delta x\,\Delta z$; их результирующая равна $\Delta\bar{\tau}_{yx}\,\Delta x\,\Delta z$. Мы не рассматриваем здесь проекций на ось x других сил, происходящих от турбулентности, так как для них получится такое же условие подобия, как и для тех сил, которые приложены к нижней и верхней граням. Для динамически подобных потоков отношение проекции силы, происходящей от турбулентности, к проекции на ту же ось силы инерции должно быть одинаковым в сходственных точках. Выразим это в виде равенства

$$\frac{\Delta\bar{\tau}_{yx}\,\Delta x\,\Delta z}{\rho\bar{v}_x \dfrac{\partial\bar{v}_x}{\partial x}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z} = \frac{\Delta\bar{\tau}_{yx}/\Delta y}{\rho\bar{v}_x \dfrac{\partial\bar{v}_x}{\partial x}} = \text{const}$$

или в пределе при $\Delta y \to 0$

$$\frac{\partial\bar{\tau}_{yx}/\partial y}{\rho\bar{v}_x \dfrac{\partial\bar{v}_x}{\partial x}} = \text{const}.$$

Подставляя вместо $\bar{\tau}_{yx}$ его выражение через пульсационные скорости, будем иметь:

$$\frac{\dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\rho\overline{v'_x v'_y}\right)}{\rho\bar{v}_x \dfrac{\partial\bar{v}_x}{\partial x}} = \text{const}.$$

Перейдем в этом равенстве от величин, характеризующих движение в данной точке, к одноименным величинам, характерным для всего потока. Величину $\overline{v'_x v'_y}$ можно выразить с помощью безразмерного коэффициента через среднюю величину квадрата пульсационной скорости на бесконечности V' следующим образом:

$$\overline{v'_x v'_y} = k\overline{V'^2},$$

причем коэффициент пропорциональности k вследствие подобия рассматриваемых потоков одинаков в сходственных точках. Приращение величины $\overline{v'_x v'_y}$ также пропорционально $\overline{V'^2}$ и так как Δy пропорционально L (через L обозначен некоторый характерный размер), то

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\rho\overline{v'_x v'_y}\right) \sim \rho\frac{\overline{V'^2}}{L},$$

где $\sim$ есть знак пропорциональности. Аналогично, выражая местную осредненную скорость $\bar{v}_x$ через осредненную скорость потока на бесконечности $\bar{V}$, найдем, что

$$\rho\bar{v}_x\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial x} \sim \rho\frac{\overline{V}^2}{L}.$$

Условие подобия для дополнительных напряжений, происходящих от пульсаций скоростей в турбулентном потоке и сил инерции, запишется теперь в виде

$$\frac{\rho\overline{V'^2}/L}{\rho\overline{V}^2/L} = \text{const},$$

если потоки динамически подобны. Коэффициенты пропорциональности здесь включены в константу в правой части, так как в сходственных точках они имеют постоянное значение. Произведя сокращение, получим, что в двух динамически подобных потоках I и II:

$$\left(\frac{\overline{V'^2}}{\overline{V}^2}\right)_{\text{I}} = \left(\frac{\overline{V'^2}}{\overline{V}^2}\right)_{\text{II}},$$

или окончательно:

$$\left(\frac{\sqrt{\overline{V'^2}}}{\bar{V}}\right)_{\text{I}} = \left(\frac{\sqrt{\overline{V'^2}}}{\bar{V}}\right)_{\text{II}}. \tag{6.9}$$

Величина $\sqrt{\overline{V'^2}}/\bar{V}$ обозначается обычно через ε и называется *степенью турбулентности* потока.

Для того чтобы по формулам (6.8) можно было вычислить до конца величины дополнительных напряжений, происходящих от пульсаций скорости, необходимо знать соотношения между пульсационными и осредненными скоростями. Задачей всякой теории турбулентного движения является составление такого рода соотношений, которые позволили бы связать в конечном счете дополнительные напряжения в турбулентном потоке с осредненной скоростью и осредненным давлением. Разумеется, для этого необходимо ввести дополнительные гипотезы о природе турбулентного движения; разные теории турбулентности отличаются друг от друга характером вводимых ими гипотез.