§ 5. Теория переноса количества движения в турбулентном потоке

Наиболее распространенные теории турбулентного движения частично используют представления кинетической теории газов, дополняя их гипотезами физического характера относительно распределения пульсационных величин. К таким теориям относятся теория переноса количества движения и теория переноса вихрей[1]). Мы изложим здесь в основных чертах теорию переноса количества движения, развитую Прандтлем, которая отличается простотой и наглядностью физических представлений.

Рассмотрим простейший случай, когда во всех точках потока осредненная скорость имеет одинаковое направление, например параллельное оси x. В этом случае $\overline{v}_y=\overline{v}_z=0$ и, следовательно (как вытекает из уравнения неразрывности движения), $\partial\overline{v}_x/\partial x=0$; это означает, что во всех плоскостях, перпендикулярных к оси x, распределение скоростей одинаково. Такой случай имеет место, например, при движении жидкости вдоль бесконечно длинной плоской стенки или при обтекании бесконечно длинной плоской пластинки. Направив ось y перпендикулярно к плоскости стенки, мы сможем написать, что в рассматриваемом случае

$$\overline{v}_x=f(y).$$

При турбулентном движении конечные массы жидкости движутся беспорядочно во всех направлениях подобно молекулам по представлениям кинетической теории газов. Основная гипотеза теории Прандтля заключается в том, что каждая из таких масс, переходя из слоя жидкости, движущегося со скоростью $\overline{v}_x$, в соседний, движущийся со скоростью $\overline{v}_x+\Delta\overline{v}_x$, сохраняет в среднем скорость $\overline{v}_x$ до столкновения с массами жидкости, движущимися со средней скоростью $\overline{v}_x+\Delta\overline{v}_x$. Иными словами, согласно этой теории, конечные массы жидкости движутся в турбулентном потоке по всем направлениям подобно молекулам: каждая такая масса при своем пульсационном движении проходит с постоянной скоростью некоторый путь (аналогичный пути свободного пробега молекулы) до тех пор, пока не смешается с окружающей жидкостью. Смешиваясь, она приобретает такую же среднюю скорость, какую имеет слой, в который она попала, и, таким образом, передает окружающей жидкости перенесенное с собой количество движения.

Нужно сказать, что гипотеза о постоянстве скорости движущихся масс между столкновениями при турбулентном переносе из одного слоя в другой и само представление о столкновениях жидких масс

[1]) Подробное изложение этих теорий имеется в книге: Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости, под ред. Гольдштейна, т. I и II, ИЛ, 1948.

не являются вполне достоверными. Однако хорошее совпадение некоторых выводов теории Прандтля с результатами экспериментов и отсутствие какой-либо более основательной гипотезы о механизме переноса количества движения заставляют все же принять ее.

Возьмем два слоя на расстоянии $\Delta y = l'$ друг от друга. Пусть в первом из этих слоев осредненная скорость будет $\bar{v}_x$, а во втором

$$\bar{v}_x + \Delta\bar{v}_x \approx \bar{v}_x + \frac{d\bar{v}_x}{dy}\Delta y = \bar{v}_x + \frac{d\bar{v}_x}{dy} l'.$$

Представим себе массу жидкости, переходящую из первого слоя во второй. Так как, согласно гипотезе Прандтля, осредненная скорость слоя, из которого выделилась рассматриваемая масса, сохраняется ею на расстоянии, равном l', то в слой, движущийся со скоростью $\bar{v}_x + \frac{d\bar{v}_x}{dy} l'$, эта масса придет, имея вдоль оси x скорость $\bar{v}_x$. Следовательно, в момент появления этой массы во втором слое там будет наблюдаться пульсационная скорость вдоль оси x, равная $v'_x = \frac{d\bar{v}_x}{dy} l'$ [1]). Что касается других составляющих пульсационной скорости, то многочисленными измерениями в условиях естественного ветра и при движении в трубах установлено, что вдали от твердых границ имеет место так называемая *изотропная турбулентность*, т. е. такое течение, в котором средние значения квадратов пульсационных скоростей одинаковы во всех направлениях. Предполагая, что турбулентность изотропна, можем написать:

$$\overline{v_x'^2} = \overline{v_y'^2}.$$

Прандтль принимает, что в среднем абсолютная величина компоненты v'_y пропорциональна абсолютной величине v'_x:

$$\overline{|v'_y|} \sim \overline{|v'_x|} = \overline{|l'|}\frac{d\bar{v}_x}{dy}$$

и что, следовательно,

$$\overline{|v'_x v'_y|} \sim \overline{|l'^2|}\left(\frac{d\bar{v}_x}{dy}\right)^2.$$

Включая здесь коэффициент пропорциональности в осредненное значение модуля l' и обозначая новое значение этой средней величины через l, получим:

$$\overline{|v'_x v'_y|} = l^2\left(\frac{d\bar{v}_x}{dy}\right)^2.$$

Абсолютная величина дополнительного касательного напряжения, происходящего от турбулентности, теперь запишется в виде

$$|\bar{\tau}_{\text{турб}}| = \rho\overline{|v'_x v'_y|} = \rho l^2\left(\frac{d\bar{v}_x}{dy}\right)^2.$$

[1]) Следует заметить, что этот вывод неприменим к точке, где $d\bar{v}_x/dy = 0$ (например, на оси трубы). По формуле получается, что пульсационная скорость в этой точке равна нулю, тогда как на самом деле она может достигать здесь максимума.

Длина l, которая фигурирует в этой формуле, называется *длиной пути перемешивания;* ее можно рассматривать как нечто аналогичное средней длине свободного пробега молекул в кинетической теории газов. Следует, впрочем, отметить, что l не имеет того непосредственного физического смысла, который был выше приписан величине l', ибо в l вошел еще в виде множителя коэффициент пропорциональности при $|\overline{l'}|$.

Для того чтобы составить формулу, определяющую $\bar{\tau}_{\text{турб}}$ не только по абсолютной величине, но и по знаку, заметим, что знак касательного напряжения должен быть одинаков со знаком градиента скорости; следовательно, можно написать, что

$$\bar{\tau}_{\text{турб}} = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right| \frac{d\bar{v}_x}{dy}. \tag{6.10}$$

Эта формула связывает для данного частного случая дополнительное напряжение, происходящее от турбулентности, с осредненной скоростью. Однако задача теории турбулентности решается этой формулой не до конца, даже для рассматриваемого частного случая, потому что в эту формулу вместо двух прежних неизвестных — компонент пульсационной скорости — входит новая неизвестная — длина пути перемешивания, которая, так же как и прежние неизвестные, есть функция y. Впрочем, можно думать, что длина пути перемешивания не так чувствительно изменяется при изменении обстоятельств движения, как величина $\bar{\tau}_{\text{турб}}$, и, следовательно, введение этой новой неизвестной не является бесцельным.

Наиболее простая гипотеза о распределении в потоке длины l была дана Прандтлем. Прандтль полагает, что длина пути перемешивания возрастает при удалении от стенки пропорционально расстоянию от нее до рассматриваемой точки, т. е. что

$$l = \varkappa y, \tag{6.11}$$

где $\varkappa$ есть некоторая постоянная величина. Попытка теоретического определения длины l была предпринята Карманом[1]. Исходя из гипотезы о подобии пульсационных движений во всех точках рассматриваемого потока и ограничиваясь лишь первыми двумя производными при разложении $\bar{v}_x$ в ряд по степеням y, Карман вывел приближенную формулу для l:

$$l = K \frac{d\bar{v}_x/dy}{d^2\bar{v}_x/dy^2}, \tag{6.12}$$

где K есть некоторая константа. Принципиальное отличие от гипотезы Прандтля заключается здесь в том, что Карман связывает

[1]) Th. Kármán, Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz. Nachrichten der Geselschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathem. Phys. Kl., 1930 (имеется в русском переводе в сборнике «Проблемы турбулентности»).

распределение длины l с производными от осредненной скорости в данной точке, тогда как Прандтль — с расстоянием от данной точки до твердой границы. Определение длины пути перемешивания по экспериментальным данным показывает, как увидим в следующем параграфе, что как формула (6.11), так и формула (6.12) верны лишь на небольшом расстоянии от стенки. Например, при течении жидкости по трубам обе формулы расходятся с действительностью при $y > 0{,}2r_0$, где r_0 — радиус трубы.

Более точное соответствие с действительностью получается в том случае, если для определения длины пути перемешивания и вообще для выяснения механизма турбулентного переноса применить теорему

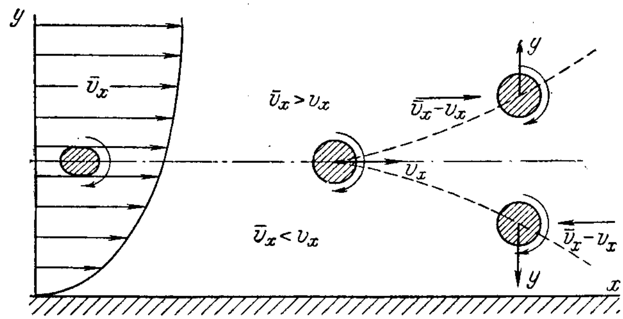

Рис. 6.8. Подъемная сила, которая приложена к выделившемуся из среды и вращающемуся жидкому объему, увеличивает его отклонение от первоначальной траектории.

Жуковского о подъемной силе[1]). Представим себе для простоты плоский турбулентный поток вязкой жидкости (рис. 6.8), в котором осредненная скорость направлена вдоль оси x и зависит лишь от расстояния y до стенки. Предположим, что из среды выделился небольшой цилиндрический жидкий объем и движется, имея в начальный момент времени поступательную скорость, равную осредненной скорости $\bar{v}_x$ в начальной точке его траектории, и угловую скорость ω_z, которая определяется формулой $\omega_z = -\frac{1}{2}\frac{d\bar{v}_x}{dy}$. Ввиду малого размера выделившегося объема можно считать, что он имеет во всех своих точках одинаковую поступательную скорость и одинаковую угловую скорость вращения. Движение такого объема жидкости будет происходить под действием силы сопротивления среды и силы, возникающей оттого, что поток набегает на вращающийся цилиндр. Последняя сила определяется известной теоремой Жуковского о подъемной силе.

---

[1]) Фабрикант Н. Я., Длина пути перемешивания при турбулентном движении, Труды Московского авиационного технологического института, вып. 8, Оборонгиз, 1950.

В связи с возникновением подъемной силы, приложенной к выделившемуся объему, его движение вдоль прежней траектории становится неустойчивым. В самом деле, как видно из рис. 6.8, при всяком малом изменении направления движения объема появляется подъемная сила Y, которая увеличивает это изменение и вызывает движение объема в направлении, перпендикулярном к $\bar{v}_x$. Таким образом, вращение жидких объемов при их поступательном движении относительно окружающей среды является причиной поперечного перемешивания в турбулентном потоке.

Если предположить, что сопротивление среды движению выделившегося объема пропорционально первой степени его скорости относительно среды, то, приближенно интегрируя уравнения его движения, можно определить длину пути перемешивания как проекцию на ось y осредненного пути, который пройдет до своей остановки жидкий объем. Для длины пути перемешивания в результате получается следующая формула:

$$l=\frac{a_1\bar{v}_x}{1+b_1\dfrac{d\bar{v}_x}{dy}},$$

где a_1 и b_1 — постоянные величины для данного потока. Последнюю формулу удобно привести к безразмерному виду; обозначая через r_0 радиус трубы или половину ширины потока, а через v_{max} — скорость на оси, сможем написать:

$$\frac{l}{r_0}=\frac{a\dfrac{\bar{v}_x}{v_{max}}}{1+b\dfrac{r_0}{v_{max}}\dfrac{d\bar{v}_x}{dy}}, \tag{6.13}$$

где a и b — безразмерные постоянные; они определены по опытным данным, причем оказалось: $a=0{,}166$, $b=0{,}26$. Значения l, вычисленные по этой формуле, находятся в хорошем соответствии со значениями, полученными экспериментально (по опытам Никурадзе для гладких труб, см. § 9), причем совпадение улучшается с возрастанием числа Рейнольдса.

Формула (6.10) определяет лишь часть касательного напряжения, которая происходит от турбулентности потока. Полная величина касательного напряжения $\bar{\tau}$ получится, если к $\tau_{турб}$ прибавить касательное напряжение, происходящее непосредственно от вязкости (оно равно в данном случае $\mu\dfrac{d\bar{v}_x}{dy}$); следовательно,

$$\bar{\tau}=\mu\frac{d\bar{v}_x}{dy}+\rho l^2\left|\frac{d\bar{v}_x}{dy}\right|\frac{d\bar{v}_x}{dy}. \tag{6.14}$$

На поверхности стенки, вдоль которой движется жидкость, т. е. при $y=0$, длина пути перемешивания обращается в нуль. Это непосредственно вытекает из физического представления о длине пути перемешивания: так как на поверхности твердой стенки поперечные пульсации отсутствуют, то должна равняться нулю и величина l. Отсюда следует, что при $y=0$ второе слагаемое в выражении для $\bar{\tau}$ отпадает и на поверхности стенки касательное напряжение определяется только вязкостью и градиентом скорости:

$$\bar{\tau}_{y=0}=\mu\left(\frac{d\bar{v}_x}{dy}\right)_{y=0}.$$

Второе слагаемое в выражении для $\bar{\tau}$ равно нулю также и в непосредственной близости к поверхности твердой стенки. Дело в том, что скорости течения и расстояния до твердой поверхности здесь весьма малы, следовательно, малы и числа Рейнольдса; поэтому турбулентное перемешивание не может возникнуть в непосредственной близости к твердой поверхности. Можно условно выделить из потока весьма тонкий слой жидкости, непосредственно прилегающий к твердой поверхности, движение в котором при данной скорости потока ламинарно. Внутри этого ламинарного слоя

$$\tau=\mu\frac{d\bar{v}_x}{dy}.$$

Вне ламинарного слоя l быстро возрастает при удалении от стенки, а вместе с l растет и относительная величина второго слагаемого в формуле (6.14) по отношению к первому. Нетрудно видеть, что даже при небольших расстояниях от стенки второе слагаемое во много раз больше первого; в самом деле, отношение второго слагаемого к первому равно

$$\frac{\rho l^2\frac{d\bar{v}_x}{dy}}{\mu}=\frac{l^2\frac{d\bar{v}_x}{dy}}{\nu}.$$

Коэффициент кинематической вязкости — величина очень малая; величины l и $d\bar{v}_x/dy$ можно считать пропорциональными соответственно y и $\overline{V}/y$. Следовательно, рассматриваемое отношение есть величина порядка $\overline{V}y/\nu$, т. е. такого же порядка, как число Рейнольдса, подсчитанное по расстоянию y, взятому в качестве характерной длины.

Можно поэтому в области вне ламинарного слоя пренебречь величиной первого слагаемого в формуле (6.13) по сравнению с величиной второго слагаемого, т. е. считать, что в этой области

$$\bar{\tau}=\rho l^2\left|\frac{d\bar{v}_x}{dy}\right|\frac{d\bar{v}_x}{dy}. \qquad (6.15)$$