§ 6. Распределение скоростей в турбулентном потоке, текущем вдоль бесконечно длинной плоской стенки

Изложенная в предыдущем параграфе теория переноса количества движения позволяет решить задачу о распределении скоростей в турбулентном потоке, движущемся вдоль бесконечно длинной стенки.

С этой целью мы выделим в потоке элемент, как показано на рис. 6.9, и рассмотрим силы, действующие на элемент. Давления, приложенные к левой и правой граням элемента, должны быть одинаковы (ибо стенка бесконечно длинна и давление поэтому не зависит от x); следовательно, для того чтобы соблюдалось равновесие сил, приложенных к элементу, должны быть одинаковы и касательные напряжения, приложенные к нижней и верхней граням. Отсюда вытекает, что $\Delta\bar{\tau}=0$, а $\tau = \mathrm{const} = \tau_0$, где τ_0 есть касательное напряжение на поверхности стенки.

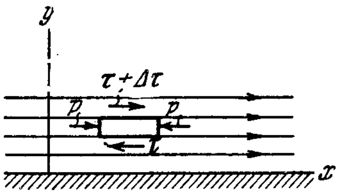

Рис. 6.9. Силы, действующие на элемент жидкости в потоке, текущем вдоль бесконечно длинной стенки.

Рассмотрим область, внешнюю по отношению к ламинарному слою, т. е. область, для которой касательное напряжение определяется равенством (6.15). Так как $\bar{\tau} = \mathrm{const}$, то это равенство можно рассматривать как дифференциальное уравнение, определяющее осредненную скорость. В данном случае $d\bar{v}_x/dy > 0$, поэтому знак абсолютной величины можно опустить, и тогда равенство (6.15) с заменой $\bar{\tau}$ на τ_0 перепишется в виде

$$\frac{\tau_0}{\rho} = l^2\left(\frac{d\bar{v}_x}{dy}\right)^2;$$

отсюда

$$\frac{d\bar{v}_x}{dy} = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}. \tag{6.16}$$

Принимая для l гипотезу Прандтля (формула (6.11)), находим:

$$d\bar{v}_x = \frac{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}}{\varkappa y}\,dy,$$

откуда

$$\bar{v}_x = \frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\ln y + \mathrm{const}. \tag{6.17}$$

Любопытно отметить, что такая же формула для осредненной скорости получается и в том случае, если воспользоваться для определения l формулой Кармана (6.12). В самом деле, тогда равенство (6.16) обращается в следующее:

$$\frac{d\overline{v}_x}{dy}=\frac{1}{K}\frac{\dfrac{d^2\overline{v}_x}{dy^2}}{\dfrac{d\overline{v}_x}{dy}}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}},$$

откуда, интегрируя, находим:

$$\overline{v}_x=\frac{1}{K}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\ln\frac{d\overline{v}_x}{dy}+\ln C_1=\frac{1}{K}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\ln\left(C_1\frac{d\overline{v}_x}{dy}\right),$$

где C_1 есть постоянная интегрирования. Потенцируем обе части этого равенства:

$$C_1\frac{d\overline{v}_x}{dy}=\exp\frac{K\overline{v}_x}{\sqrt{\tau_0/\rho}}.$$

Разделяя здесь переменные и интегрируя, получим:

$$C_1\frac{\sqrt{\dfrac{\tau_0}{\rho}}}{K}e^{\frac{-K\overline{v}_x}{\sqrt{\tau_0/\rho}}}=y+C_2,$$

где C_2 есть постоянная интегрирования. Теперь, логарифмируя, находим:

$$\overline{v}_x=\frac{\sqrt{\tau_0/\rho}}{-K}\ln(y+C_2)+\text{const}.$$

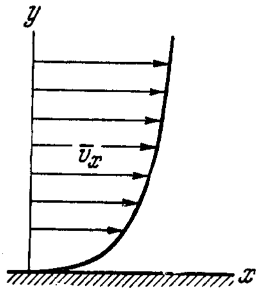

Рис. 6.10. Логарифмический закон распределения скоростей.

Если положить здесь $C_2=0$ и $-K=\varkappa$, то получим полное совпадение последней формулы с формулой (6.17).

Итак, в рассматриваемом случае турбулентного потока осредненная скорость распределена по нормали к стенке по логарифмическому закону.

Кривая распределения скоростей, соответствующая логарифмическому закону, представлена на рис. 6.10. Из рисунка видно, что распределение скоростей по нормали к стенке при турбулентном течении гораздо более равномерно, нежели при ламинарном[1]). С физической точки зрения это вполне понятно: при турбулентном течении происходит интенсивное перемешивание частей жидкости, находящихся на разных расстояниях от стенки, и вследствие этого осредненные скорости разных слоев выравниваются. Отсюда можно прийти к заклю-

[1]) При ламинарном течении вдоль плоской стенки распределение скоростей прямолинейно. В самом деле, в этом случае $\tau=\mu\dfrac{dv_x}{dy}$, и так как при всех значениях y $\tau=\tau_0=\text{const}$, то $\mu\dfrac{dv_x}{dy}=\tau_0$, откуда

$$v_x=\frac{\tau_0}{\mu}y.$$

Постоянная интегрирования здесь равна нулю, ибо $v_x=0$ при $y=0$.

чению, что градиент скорости у поверхности стенки в турбулентном потоке значительно превосходит градиент скорости в ламинарном (ибо в турбулентном потоке скорости вблизи стенки больше, нежели в ламинарном, а на самой поверхности стенки *при любом режиме течения* скорость равна нулю). Так как градиент скорости у поверхности стенки определяет величину касательного напряжения, то мы получаем, таким образом, объяснение того факта, что касательные напряжения и потери энергии на трение при турбулентном потоке при прочих равных условиях во много раз превосходят соответственно касательные напряжения и потери энергии при ламинарном.

Формулу (6.17) путем простых преобразований можно привести к безразмерному виду. Обозначим $\sqrt{\tau_0/\rho}$ через v_*; эта величина, как нетрудно проверить, действительно имеет размерность скорости; назовем ее «скоростью касательного напряжения» (применяется также название «динамическая скорость»). Введем, кроме того, в формулу (6.17) вместо y безразмерное выражение yv_*/ν, построенное так же, как число Рейнольдса; постоянное слагаемое $\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\ln\frac{v_*}{\nu}$, которое при этом получится, включим в константу, входящую в правую часть формулы. Тогда формула (6.17) примет вид

$$\frac{\bar{v}_x}{v_*}=\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{v_* y}{\nu}+\text{const}. \tag{6.18}$$

Измерения поля скоростей показывают, что эта формула близка к действительности. Следует лишь иметь в виду, что поскольку исходное равенство (6.15) применимо лишь к области, находящейся вне ламинарного слоя, то и последнюю формулу можно применять только вне этого слоя, т. е. к области развитой турбулентности. Для ламинарного слоя эта формула непригодна; это видно хотя бы из того, что при $y=0$ формула дает для скорости бесконечно большое значение, тогда как на самом деле при $y=0$ $\bar{v}_x=0$.

Изложенная здесь в общих чертах теория турбулентного движения относится лишь к простейшему случаю течения жидкости вдоль бесконечно длинной плоской стенки. Однако даже для этого простейшего случая теория не может быть признана в настоящее время ни достаточно полной, ни логически безукоризненной. Несколько более обоснованной является теория переноса вихрей, построенная на гипотезе о сохранении циркуляции скорости перемешивающихся масс жидкости.

§ 7. Теория переноса вихрей в турбулентном потоке

Рассмотрим, как и в параграфе, посвященном теории переноса количества движения, наиболее простой случай, когда осредненное течение является плоским, параллельным оси x. В этом случае $\bar{v}_x$ представляет собою функцию лишь от y. Осредненное касательное напряжение