чению, что градиент скорости у поверхности стенки в турбулентном потоке значительно превосходит градиент скорости в ламинарном (ибо в турбулентном потоке скорости вблизи стенки больше, нежели в ламинарном, а на самой поверхности стенки *при любом режиме течения* скорость равна нулю). Так как градиент скорости у поверхности стенки определяет величину касательного напряжения, то мы получаем, таким образом, объяснение того факта, что касательные напряжения и потери энергии на трение при турбулентном потоке при прочих равных условиях во много раз превосходят соответственно касательные напряжения и потери энергии при ламинарном.

Формулу (6.17) путем простых преобразований можно привести к безразмерному виду. Обозначим $\sqrt{\tau_0/\rho}$ через v_*; эта величина, как нетрудно проверить, действительно имеет размерность скорости; назовем ее «скоростью касательного напряжения» (применяется также название «динамическая скорость»). Введем, кроме того, в формулу (6.17) вместо y безразмерное выражение yv_*/ν, построенное так же, как число Рейнольдса; постоянное слагаемое $\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\ln\frac{v_*}{\nu}$, которое при этом получится, включим в константу, входящую в правую часть формулы. Тогда формула (6.17) примет вид

$$\frac{\bar{v}_x}{v_*} = \frac{1}{\varkappa}\ln\frac{v_* y}{\nu} + \text{const}. \tag{6.18}$$

Измерения поля скоростей показывают, что эта формула близка к действительности. Следует лишь иметь в виду, что поскольку исходное равенство (6.15) применимо лишь к области, находящейся вне ламинарного слоя, то и последнюю формулу можно применять только вне этого слоя, т. е. к области развитой турбулентности. Для ламинарного слоя эта формула непригодна; это видно хотя бы из того, что при $y=0$ формула дает для скорости бесконечно большое значение, тогда как на самом деле при $y=0$ $\bar{v}_x=0$.

Изложенная здесь в общих чертах теория турбулентного движения относится лишь к простейшему случаю течения жидкости вдоль бесконечно длинной плоской стенки. Однако даже для этого простейшего случая теория не может быть признана в настоящее время ни достаточно полной, ни логически безукоризненной. Несколько более обоснованной является теория переноса вихрей, построенная на гипотезе о сохранении циркуляции скорости перемешивающихся масс жидкости.

§ 7. Теория переноса вихрей в турбулентном потоке

Рассмотрим, как и в параграфе, посвященном теории переноса количества движения, наиболее простой случай, когда осредненное течение является плоским, параллельным оси x. В этом случае $\bar{v}_x$ представляет собою функцию лишь от y. Осредненное касательное напряжение определяется в этом случае первой из формул (6.8)

$$\bar{\tau} = -\rho\overline{v'_x v'_y}.$$

Дифференцируя это выражение по y, получим:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial y} = -\frac{\partial(\overline{v'_x v'_y})}{\partial y}.$$

Напомним, что осредненная величина представляет собой интеграл, взятый по времени, деленный на промежуток интегрирования; производная от этого интеграла, в данном случае по параметру y, как известно из математики, равна интегралу от соответствующей производной; поэтому можно написать:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial y} = -\overline{\frac{\partial(v'_x v'_y)}{\partial y}} = -\overline{\left(v'_x\frac{\partial v'_y}{\partial y} + v'_y\frac{\partial v'_x}{\partial y}\right)}.$$

Применим теперь уравнение неразрывности движения; для плоского потока несжимаемой жидкости оно имеет вид

$$\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial\bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial v'_x}{\partial x} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} = 0.$$

Предположим, что осредненный поток удовлетворяет условию неразрывности движения; тогда этому условию будет удовлетворять, как видно из последнего уравнения, также и пульсационный поток, т. е.

$$\frac{\partial v'_x}{\partial x} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} = 0.$$

Умножая это уравнение почленно на v'_x, осредняя и прибавляя к правой части формулы для $\partial\bar{\tau}/\partial y$, будем иметь:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial y} = \frac{1}{2}\overline{\frac{\partial v'^2_x}{\partial x}} - \frac{1}{2}\overline{\frac{\partial v'^2_y}{\partial x}} + \overline{v'_y\left(\frac{\partial v'_y}{\partial x} - \frac{\partial v'_x}{\partial y}\right)}.$$

Если турбулентность изотропна, что мы и предположим, то $\overline{v'^2_x} = \overline{v'^2_y}$ и первые два слагаемых в правой части последнего равенства взаимно уничтожаются; выражение $\partial v'_y/\partial x - \partial v'_x/\partial y$ представляет собою $2\omega'_z$; таким образом,

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial y} = 2\overline{v'_y\omega'_z}. \tag{6.19}$$

Для того чтобы связать пульсационные линейные и угловые скорости с осредненными, будем рассуждать аналогично тому, как это было сделано в теории переноса количества движения. Возьмем два слоя, параллельных направлению движения, оси которых отстоят друг от друга на величину, равную l', а осредненные скорости отличаются на $d\bar{v}_x$. Предполагая, что масса жидкости, переходящая из одного слоя в другой, сохраняет на всем протяжении своего пути скорость слоя, из которого она выделилась, мы придем к выводу, что пульсационная скорость равна

$$v'_y = \frac{d\bar{v}_x}{dy}l'.$$

Относительно угловой скорости вращения массы жидкости, переходящей из одного слоя в другой, также предположим, что она на протяжении длины l'' (которая, вообще говоря, отличается от l') сохраняет свою величину. Взяв два слоя, параллельных направлению движения, оси которых отстоят друг от друга на величину, равную $\Delta y = l''$, мы, так же как и для линейной скорости, сможем написать, что если в одном слое осредненная угловая скорость равна $\overline{\omega}_z$, а в другом — $\overline{\omega}_z + \Delta\overline{\omega}_z$, то

$$\overline{\omega}_z + \Delta\overline{\omega}_z = \overline{\omega}_z + \frac{d\overline{\omega}_z}{dy}\Delta y = \overline{\omega}_z + \frac{d\overline{\omega}_z}{dy} l''.$$

Масса жидкости, переходящая из одного слоя в другой и сохраняющая при этом свою угловую скорость, вызовет в новом слое пульсацию угловой скорости, равную

$$\omega'_z = \frac{d\overline{\omega}_z}{dy} l''.$$

Подставляя выражения v'_y и ω'_z в формулу (6.19) и обозначая $-l'l'' = l^2$, получим:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{\tau}}{\partial y} = -2l^2 \frac{d\overline{v}_x}{dy}\frac{d\overline{\omega}_z}{dy}.$$

Так как в рассматриваемом случае движения $\overline{\omega}_z = -\frac{1}{2}\frac{d\overline{v}_x}{dy}$, то формула для $\partial\overline{\tau}/\partial y$ приобретает вид

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{\tau}}{\partial y} = l^2 \frac{d\overline{v}_x}{dy}\frac{d^2\overline{v}_x}{dy^2}. \tag{6.20}$$

Величина l, так же как и в теории переноса количества движения, может быть условно названа длиной пути перемешивания.

Изложенная здесь теория переноса завихренности была впервые выдвинута английским ученым Тейлором [1]).

В качестве примера применения теории Тейлора рассмотрим вопрос о распределении скоростей в турбулентном потоке между двумя параллельными плоскостями. Касательное напряжение в этом случае распределено по поперечному сечению потока по линейному закону, в чем нетрудно убедиться аналогично тому, как это ранее было сделано для течения по трубопроводу. Обозначая через h половину расстояния между плоскостями и помещая ось x в плоскости симметрии потока, сможем написать:

$$\overline{\tau} = \tau_0 \frac{y}{h}.$$

Для длины пути перемешивания примем простейшее предположение Прандтля о том, что эта величина пропорциональна расстоянию до стенки:

$$l = \varkappa(h - y).$$

Подставляя эти выражения в формулу (6.20) и замечая, что

$$\frac{d\overline{v}_x}{dy}\frac{d^2\overline{v}_x}{dy^2} = \frac{1}{2}\frac{d}{dy}\left[\left(\frac{d\overline{v}_x}{dy}\right)^2\right],$$

получим:

$$\frac{d}{dy}\left[\left(\frac{d\overline{v}_x}{dy}\right)^2\right] = \frac{2\tau_0}{\rho h \varkappa^2 (h-y)^2}.$$

Проинтегрировав это равенство, будем иметь:

$$\left(\frac{d\overline{v}_x}{dy}\right)^2 = \frac{2\tau_0}{\rho h \varkappa^2}\frac{1}{h-y} + C.$$

Постоянную интегрирования C определим здесь из условия, что при $y = 0$

[1]) См. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости, под ред. Гольдштейна, ИЛ, 1948.

$\frac{d\bar{v}_x}{dy}=0$; тогда находим:

$$\frac{d\bar{v}_x}{dy}=-\frac{1}{h\varkappa}\sqrt{\frac{2\tau_0}{\rho}}\sqrt{\frac{y}{h-y}}.$$

Вновь интегрируя, получим:

$$\bar{v}_x=\frac{1}{h\varkappa}\sqrt{\frac{2\tau_0}{\rho}}\left[\sqrt{y(h-y)}+h\arcsin\sqrt{\frac{h-y}{h}}\right]+C_1;$$

так как при $y=h$ $\bar{v}_x=0$, то постоянная интегрирования C_1 здесь равна нулю. Вводя уже известное обозначение $\sqrt{\tau_0/\rho}=v_*$, приведем формулу к безразмерному виду:

$$\frac{\bar{v}_x}{v_*}=\frac{\sqrt{2}}{\varkappa}\left[\arcsin\sqrt{1-\frac{y}{h}}+\sqrt{\frac{y}{h}\left(1-\frac{y}{h}\right)}\right].$$

Сопоставление с опытными данными показывает, что эта формула будет соответствовать действительности, если положить $\varkappa=0{,}23$.

Таким образом, теория переноса вихрей, так же как и теория переноса количества движения, не доводит формулы до их окончательного, рабочего вида. В частности, остаются неопределенными все константы (например, $\varkappa$). Для их определения приходится обращаться к эксперименту. Роль теорий турбулентности в их современном виде заключается главным образом в том, что они, во-первых, создают некоторую физическую модель явления, во-вторых, указывают хотя бы общий вид зависимостей, характеризующих турбулентный поток. Последнее обстоятельство имеет громадное значение для правильной постановки эксперимента и обработки его результатов: многие закономерности турбулентного потока были вскрыты лишь благодаря тому, что они в общем виде были подсказаны теорией [1]).

§ 8. Турбулентное движение жидкости в круглой цилиндрической трубе. Степенной закон распределения скоростей

Наиболее удобным для экспериментального изучения турбулентного потока является течение жидкости по круглой цилиндрической трубе. Вследствие этого движение жидкости в круглой цилиндрической трубе изучено к настоящему времени весьма полно. Результатами экспериментальных исследований течения по трубам приходится пользоваться не только в гидротехнике, но и в аэродинамике, при исследовании обтекания тел, находящихся в потоке. Мы обратимся теперь к рассмотрению наиболее важных из этих результатов.

Возможность научного обобщения результатов гидравлических опытов появилась лишь после того, как Рейнольдсом был установлен в 1883 г. общий закон, согласно которому режим движения определяется не скоростью и диаметром трубы, рассматриваемыми отдельно, как это считалось до того, а безразмерным отношением $v_{\text{ср}}d/\nu$. Про-

[1]) Наряду с изложенными здесь теориями турбулентного движения в настоящее время достигла высокого уровня развития теория, основанная на применении методов статистической механики. См. Бай Ши-и, Турбулентное течение жидкостей и газов, ИЛ, 1962.