$\frac{d\bar{v}_x}{dy}=0$; тогда находим:

$$\frac{d\bar{v}_x}{dy}=-\frac{1}{h\varkappa}\sqrt{\frac{2\tau_0}{\rho}}\sqrt{\frac{y}{h-y}}.$$

Вновь интегрируя, получим:

$$\bar{v}_x=\frac{1}{h\varkappa}\sqrt{\frac{2\tau_0}{\rho}}\left[\sqrt{y(h-y)}+h\arcsin\sqrt{\frac{h-y}{h}}\right]+C_1;$$

так как при $y=h$ $\bar{v}_x=0$, то постоянная интегрирования C_1 здесь равна нулю. Вводя уже известное обозначение $\sqrt{\tau_0/\rho}=v_*$, приведем формулу к безразмерному виду:

$$\frac{\bar{v}_x}{v_*}=\frac{\sqrt{2}}{\varkappa}\left[\arcsin\sqrt{1-\frac{y}{h}}+\sqrt{\frac{y}{h}\left(1-\frac{y}{h}\right)}\right].$$

Сопоставление с опытными данными показывает, что эта формула будет соответствовать действительности, если положить $\varkappa=0{,}23$.

Таким образом, теория переноса вихрей, так же как и теория переноса количества движения, не доводит формулы до их окончательного, рабочего вида. В частности, остаются неопределенными все константы (например, $\varkappa$). Для их определения приходится обращаться к эксперименту. Роль теорий турбулентности в их современном виде заключается главным образом в том, что они, во-первых, создают некоторую физическую модель явления, во-вторых, указывают хотя бы общий вид зависимостей, характеризующих турбулентный поток. Последнее обстоятельство имеет громадное значение для правильной постановки эксперимента и обработки его результатов: многие закономерности турбулентного потока были вскрыты лишь благодаря тому, что они в общем виде были подсказаны теорией [1]).

§ 8. Турбулентное движение жидкости в круглой цилиндрической трубе. Степенной закон распределения скоростей

Наиболее удобным для экспериментального изучения турбулентного потока является течение жидкости по круглой цилиндрической трубе. Вследствие этого движение жидкости в круглой цилиндрической трубе изучено к настоящему времени весьма полно. Результатами экспериментальных исследований течения по трубам приходится пользоваться не только в гидротехнике, но и в аэродинамике, при исследовании обтекания тел, находящихся в потоке. Мы обратимся теперь к рассмотрению наиболее важных из этих результатов.

Возможность научного обобщения результатов гидравлических опытов появилась лишь после того, как Рейнольдсом был установлен в 1883 г. общий закон, согласно которому режим движения определяется не скоростью и диаметром трубы, рассматриваемыми отдельно, как это считалось до того, а безразмерным отношением $v_{\text{ср}}d/\nu$. Про-

[1]) Наряду с изложенными здесь теориями турбулентного движения в настоящее время достигла высокого уровня развития теория, основанная на применении методов статистической механики. См. Бай Ши-и, Турбулентное течение жидкостей и газов, ИЛ, 1962.

шло, однако, около тридцати лет после этого открытия, прежде чем было осознано, что число Рейнольдса определяет не только переход ламинарного движения в турбулентное, но и величину коэффициента сопротивления трубы при любом режиме движения. Лишь в 1911 г. Блазиус положил в основу обработки гидравлических опытов закон подобия Рейнольдса. Обработав большое количество экспериментального материала по сопротивлению гладких труб для большого диапазона чисел Рейнольдса, достигавших значений $\mathsf{R}=10^5$, Блазиус установил[1]), что коэффициент сопротивления трубы λ при турбулентном режиме может быть определен следующей формулой:

$$\lambda=\frac{0{,}3164}{\mathsf{R}^{1/4}} \qquad (2{,}3\cdot 10^3\leqslant \mathsf{R}\leqslant 1\cdot 10^5).$$

То обстоятельство, что коэффициенты сопротивления для труб разных диаметров, для разных жидкостей и скоростей течения оказывались одинаковыми, как только совпадали числа Рейнольдса и что

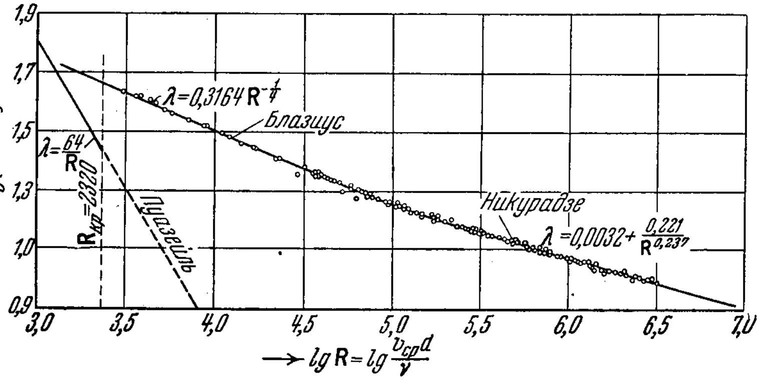

Рис. 6.11. Зависимость коэффициента сопротивления гладкой трубы от числа Рейнольдса при турбулентном течении (формула Блазиуса). Для сравнения показана также зависимость λ от R при ламинарном течении (формула Пуазейля).

все эти коэффициенты, будучи построенными в функции числа Рейнольдса, расположились на одной кривой, явилось блестящим подтверждением правильности закона подобия Рейнольдса. Численные значения λ, определенные по формуле Блазиуса, значительно больше (как это и должно быть при турбулентном движении) значений λ при тех же числах Рейнольдса, определяемых формулой Пуазейля для ламинарного движения. Коэффициент сопротивления λ в формуле Блазиуса с возрастанием числа Рейнольдса убывает, однако, значительно медленнее, чем при ламинарном течении. В системе координат, где по осям отложены соответственно $\lg \mathsf{R}$ и $\lg\lambda$, формула Блазиуса графически изобразится прямой линией. Зависимость λ от R в этой системе координат представлена на рис. 6.11.

[1]) Blasius H., Die Ähnlichkeitsgesetze bei Reibungsvorgängen, Physikal. Zeitschrift, т. 12, 1911, а также Forschungsarbeiten d. V. D. I., вып. 131, 1913.

Для того чтобы определить потерю давления при турбулентном течении, подставим в общую зависимость

$$p_1 - p_2 = \lambda \frac{\rho v_{\text{ср}}^2}{2} \frac{L}{d}$$

вместо λ его выражение по формуле Блазиуса; тогда получим:

$$p_1 - p_2 = \frac{0{,}3164}{\left(\frac{v_{\text{ср}} d}{\nu}\right)^{1/4}} \frac{\rho v_{\text{ср}}^2}{2} \frac{L}{d}. \tag{6.21}$$

Отсюда видно, что при турбулентном течении по трубе с числом Рейнольдса, не превышающим 10^5, потеря давления на трение пропорциональна средней скорости в степени $^7/_4$ (тогда как при ламинарном течении эта потеря пропорциональна первой степени скорости).

Работа Блазиуса не только подвела итог экспериментальным результатам, но и дала в свое время толчок развитию теории турбулентного движения. Первые теории турбулентности, относящиеся к 1920—1921 гг., имели полуэмпирический характер и базировались главным образом на формуле Блазиуса. Основным объектом этих теорий был вопрос о распределении скоростей по сечению трубы. Зная закон сопротивления и приняв дополнительно некоторые гипотезы, можно, оказывается, вывести закон распределения скоростей по сечению [1]).

Прежде чем перейти к этому выводу, преобразуем формулу (6.21) к безразмерному виду. Введем в нее вместо разности давлений в двух сечениях трубы касательное напряжение на поверхности стенки τ_0, так как по формуле (6.1)

$$p_1 - p_2 = 4\tau_0 \frac{L}{d},$$

то равенство (6.21) теперь примет вид

$$\frac{\tau_0}{\rho} = 0{,}03955\, v_{\text{ср}}^{7/4} \left(\frac{\nu}{d}\right)^{1/4}.$$

Заменяя здесь τ_0/ρ через v_*^2 и решая последнее уравнение относительно $v_{\text{ср}}$, находим:

$$v_{\text{ср}} = \frac{1}{0{,}03955^{4/7}} \frac{v_*^{8/7} d^{1/7}}{\nu^{1/7}} = 6{,}33 v_* \left(\frac{v_* d}{\nu}\right)^{1/7},$$

откуда

$$\frac{v_{\text{ср}}}{v_*} = 6{,}33 \left(\frac{v_* d}{\nu}\right)^{1/7},$$

или

$$\frac{v_{\text{ср}}}{v_*} = 6{,}99 \left(\frac{v_* r_0}{\nu}\right)^{1/7}, \tag{6.22}$$

где через r_0 обозначен радиус трубы.

---

[1]) Kàrmàn Th., Über laminare und turbulente Reibung Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, т. I, 1921.

Введем теперь гипотезу о том, что при движении жидкости по трубе сохраняется кинематическое подобие при изменении скорости потока и радиуса трубы. Иными словами, предположим, что если изменяется скорость в какой-либо точке поперечного сечения трубы, например, если изменяется скорость на оси трубы $\bar{v}_{max}$, то одновременно изменяются во столько же раз скорости во всех точках сечения. Математически это можно записать в виде равенства

$$\bar{v}=\bar{v}_{max} f\left(\frac{y}{r_0}\right), \tag{6.23}$$

где y есть расстояние от стенки трубы до рассматриваемой точки поперечного сечения. Из этой записи видно, что в сходственных точках разных труб, т. е. в точках, для которых y/r_0 есть величина постоянная, будет одинаковым и отношение местной скорости $\bar{v}$ к скорости на оси трубы $\bar{v}_{max}$. Отнсcительно функции $f(y/r_0)$ при этом предполагается, что она зависит только от y/r_0 и не зависит ни от $\bar{v}_{max}$, ни от радиуса трубы r_0. Из этой гипотезы сразу же вытекает, что средняя по сечению скорость v_{cp} и скорость на оси трубы пропорциональны друг другу, причем коэффициент пропорциональности есть величина постоянная, не зависящая ни от скорости, ни от размеров трубы. В самом деле, если при изменении $\bar{v}_{max}$ изменяются во столько же раз скорости во всех остальных точках сечения, то изменяется во столько же раз и средняя скорость, и следовательно, соотношение между средней скоростью и максимальной сохранится неизменным. Можно поэтому написать:

$$v_{cp}=k\bar{v}_{max}, \tag{6.24}$$

где k есть коэффициент пропорциональности.

Формулу (6.22) теперь можно переписать в виде

$$\frac{\bar{v}_{max}}{v_*}=\frac{6{,}99}{k}\left(\frac{v_* r_0}{\nu}\right)^{1/7}.$$

Введем в последнюю формулу вместо $\bar{v}_{max}$ местную скорость $\bar{v}$; для этого воспользуемся равенством (6.23):

$$\frac{\bar{v}}{v_*}=\frac{6{,}99}{k}\left(\frac{v_* r_0}{\nu}\right)^{1/7} f\left(\frac{y}{r_0}\right). \tag{6.25}$$

Нетрудно видеть, какова должна быть функция $f(y/r_0)$ для того, чтобы местная скорость не зависела от r_0. Она должна представлять собою множитель, содержащий r_0 в степени с показателем $-{}^1/_7$; но в таком случае, поскольку функция $f(y/r_0)$ зависит только от отношения y/r_0, в этот множитель должен входить также y в степени с показателем ${}^1/_7$. Следовательно,

$$f\left(\frac{y}{r_0}\right)=\left(\frac{y}{r_0}\right)^{1/7},$$

и равенство (6.23) принимает вид

$$\bar{v} = \bar{v}_{\max} \left(\frac{y}{r_0}\right)^{1/7}, \tag{6.26}$$

или если вместо y ввести расстояние от оси трубы $r = r_0 - y$, то получим:

$$\bar{v} = \bar{v}_{\max} \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^{1/7}.$$

Таким образом, при турбулентном течении жидкости по цилиндрической трубе с сопротивлением, определяемым формулой Блазиуса, скорость можно считать распределенной по закону корня седьмой степени. Кривая, изображающая этот закон, представлена на рис. 6.12.

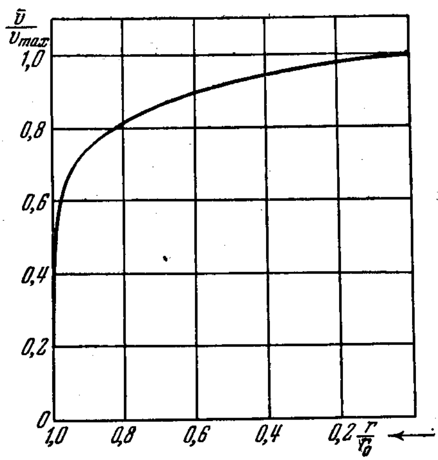

Рис. 6.12. Распределение скоростей по закону корня седьмой степени при турбулентном течении в трубе.

Формула (6.26) благодаря своей простоте весьма удобна и поэтому часто используется. Однако нужно иметь в виду, что она применима не для всех чисел Рейнольдса, а лишь для $\mathsf{R} \leqslant 10^5$, и не для всех точек поперечного сечения трубы. В частности, она не пригодна для ламинарного слоя, прилегающего к стенкам трубы. В самом деле, при $y = 0$ по этой формуле получается бесконечно большое значение градиента скорости по нормали к стенке:

$$\frac{d\bar{v}}{dy} = \frac{\bar{v}_{\max}}{r_0} \frac{1}{7} \left(\frac{y}{r_0}\right)^{-6/7}_{y \to 0} \to \infty.$$

В действительности же градиент скорости у стенки есть величина конечная, так как по законам ламинарного течения произведение $\mu \frac{dv}{dy}$ определяет величину касательного напряжения.

Формула (6.26) неприменима и к точкам, находящимся вблизи оси трубы. На оси трубы, т. е. при $y = r_0$, производная $d\bar{v}/dy$ должна равняться нулю, а по формуле (6.26) получается, как видно из выражения для $d\bar{v}/dy$, значение, не равное нулю. Формула (6.26) дает, следовательно, профиль скоростей с изломом по оси.

Мы можем теперь вычислить коэффициент k в соотношении (6.24)[1]. Средняя по сечению скорость $v_{\text{ср}}$ определяется формулой

$$v_{\text{ср}} = \frac{\int\limits_0^{r_0} 2\pi r \cdot \bar{v}\, dr}{\pi r_0^2} = \frac{2\bar{v}_{\max}}{r_0^2} \int\limits_0^{r_0} \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^{\frac{1}{7}} r\, dr = 0{,}816 \bar{v}_{\max};$$

[1]) Подробно эти вычисления были проведены для степенного закона распределения скоростей (с любым показателем степени n) в гл. IV (§ 3, пример 6).

следовательно, $k = 0{,}816$. При ламинарном течении средняя скорость составляет, как мы знаем, всего 0,5 максимальной; отсюда видно, что распределение скоростей при турбулентном течении значительно более равномерно, чем при ламинарном. Это иллюстрируется также рис. 6.13, на котором сопоставлено параболическое распределение скоростей, соответствующее ламинарному движению, и распределение скоростей, соответствующее турбулентному движению (при одинаковом в обоих случаях секундном расходе).

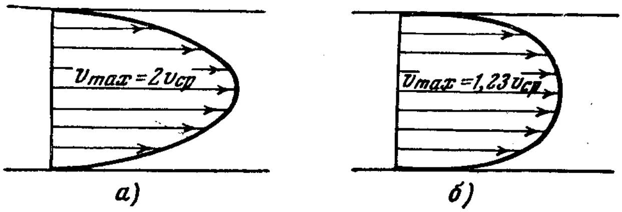

Рис. 6.13. *а*) Распределение скоростей по сечению трубы при ламинарном движении; *б*) распределение скоростей по сечению трубы при турбулентном движении.

Подставим найденное значение k и выражение для функции $f(y/r_0)$ в равенство (6.25); тогда получим формулу для распределения скоростей по сечению в следующем виде:

$$\frac{\bar{v}}{v_*} = 8{,}57 \left(\frac{v_* y}{\nu}\right)^{1/7}. \tag{6.27}$$

Переменные величины здесь те же, что и в теоретической формуле (6.18): «безразмерная скорость» $\bar{v}/v_*$ и «безразмерное расстояние» $v_* y/\nu$, представляющее собой число Рейнольдса, в котором характерная длина есть y, а характерная скорость v_*.

Более поздние исследования, нежели те, которыми располагал Блазиус, показали, что при $\mathsf{R} > 10^5$ значения λ систематически отклоняются от закона Блазиуса. Оказалось, что вообще λ нельзя представить в виде простой степенной зависимости от числа Рейнольдса типа

$$\lambda = \frac{\text{const}}{\mathsf{R}^m}$$

с постоянным для всех значений R показателем степени m. Как показали опыты, величина m с возрастанием R убывает и в соответствии с этим убывает при возрастании R также показатель степени в формуле (6.26) для распределения скоростей. Таким образом, ни формула Блазиуса, ни формула (6.26) для распределения скоростей по сечению не являются универсальными, т. е. пригодными для всех чисел Рейнольдса, при которых течение в трубе турбулентное.

Разными исследователями были предложены эмпирические формулы несколько более сложного вида, нежели формула Блазиуса, охватывающие бо́льший диапазон чисел Рейнольдса. Большинство этих формул дают λ в виде линейной функции от R^{-m}. Наиболее часто употребляется формула Никурадзе[1])

$$\lambda = 0{,}0032 + \frac{0{,}221}{\mathsf{R}^{0{,}237}} \quad \text{для } \mathsf{R} \leqslant 32{,}4 \cdot 10^5.$$

Эта формула соответствует действительности в диапазоне чисел Рейнольдса большем, нежели другие формулы.

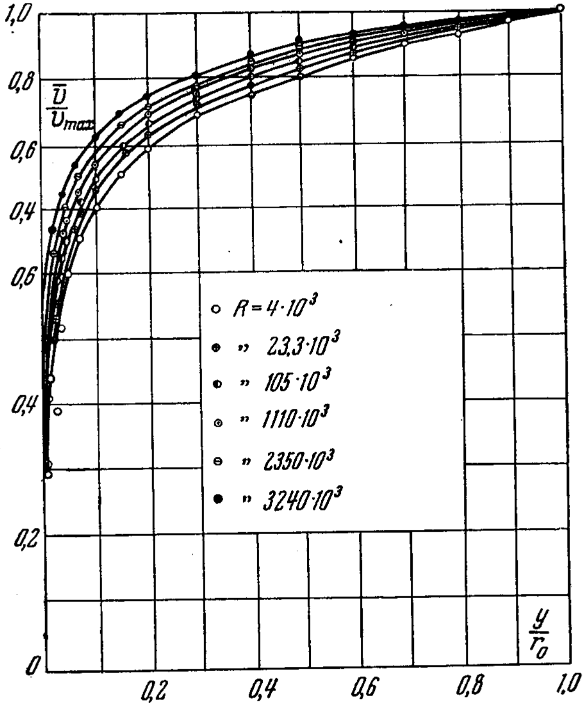

Рис. 6.14. Кривые распределения скоростей по сечению трубы при турбулентном течении для разных чисел Рейнольдса (по измерениям Никурадзе).

Каждой из формул для λ соответствует свой закон распределения скоростей по сечению; он может быть установлен тем же способом, с помощью которого из формулы Блазиуса был выведен закон корня седьмой степени.

[1]) Nikuradse I., Gesetzmässigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren, Forschungsarbeiten d. V. D. I., вып. 356, 1932 (имеется в русском переводе в сборнике «Проблемы турбулентности», ОНТИ, 1936).

Однако получить закон распределения скоростей из формулы Никурадзе в аналитическом виде невозможно. Мы обратимся поэтому непосредственно к экспериментам по измерению распределения скоростей в цилиндрических круглых трубах. Наиболее полное исследование движения жидкости по цилиндрическим трубам при больших значениях числа Рейнольдса было выполнено Никурадзе [1]).

Эксперименты Никурадзе охватывают весьма широкий промежуток чисел Рейнольдса (от $R = 4 \cdot 10^3$ до $R = 32{,}4 \cdot 10^5$). Измерение скоростей производилось с помощью микротрубки полного давления в выходном сечении трубы, что позволило измерять скорость в непосредственной близости к поверхности стенки. Большая длина испытываемых труб давала возможность вести опыт за разгонным участком [2]).

Некоторые из экспериментальных кривых распределения скоростей, полученных Никурадзе, представлены на рис. 6.14. Из этого графика видно, что с возрастанием числа Рейнольдса распределение скоростей становится все более равномерным. Можно думать, что при $R \to \infty$ распределение скоростей будет приближаться к равномерному, действие вязкости, а значит, и ламинарного слоя станет исчезающе малым.

§ 9. Турбулентное движение жидкости в круглой цилиндрической трубе. Универсальный логарифмический закон распределения скоростей

Экспериментируя в большом диапазоне чисел Рейнольдса, Никурадзе отчетливо обнаружил, что степенной закон Блазиуса для коэффициента сопротивления λ и степенной закон для распределения скоростей не являются универсальными; даже в пределах промежутка чисел Рейнольдса, исследованных Блазиусом, их можно рассматривать лишь как первое приближение. В частности, оказывается, что показатель степени n в формуле для распределения скоростей по степенному закону

$$\bar{v} = \bar{v}_{\max} \left(\frac{y}{r_0}\right)^n$$

непрерывно убывает при возрастании рейнольдсова числа от значения $n = 1/6$ при $R = 4 \cdot 10^3$ до значения $n = 1/10$ при $R = 32{,}4 \cdot 10^5$.

Следуя изложенной в предыдущем теории турбулентности Прандтля, Никурадзе искал универсальную зависимость (т. е. пригодную для всех чисел Рейнольдса в турбулентной области) безразмерной «скорости» от безразмерного «расстояния», зависимость типа

$$\frac{\bar{v}}{v_*} = F\left(\frac{v_* y}{\nu}\right).$$

[1]) См. сноску на стр. 612.

[2]) По измерениям Никурадзе длина разгонного участка при турбулентном течении равна приблизительно 40 диаметрам трубы.