

### § 10. Универсальный логарифмический закон для коэффициента сопротивления гладких труб при турбулентном движении

В предыдущем мы видели, что если известно распределение скоростей, то можно непосредственно найти закон сопротивления. Мы располагаем теперь универсальным законом распределения скоростей по сечению трубы (формула (6.28)), и поэтому естественно поставить вопрос о выводе универсального же закона для сопротивления.

Перепишем предварительно формулу (6.28), заменив в ней для удобства дальнейших вычислений десятичный логарифм натуральным:

$$\frac{\bar{v}}{v_*} = 2,5 \ln \frac{v_* y}{\nu} + 5,5.$$

Полагая в этой формуле  $y = r_0$ , находим «безразмерную скорость» на оси трубы:

$$\frac{\bar{v}_{\max}}{v_*} = 2,5 \ln \frac{v_* r_0}{\nu} + 5,5. \quad (6.29)$$

Вычтем из последнего равенства предыдущее; тогда получим:

$$\frac{\bar{v}_{\max} - \bar{v}}{v_*} = -2,5 \ln \frac{y}{r_0}.$$

Из этого равенства видно, что разность «безразмерных скоростей» — местной и максимальной (так называемый «недостаток скорости») — есть функция только отношения  $y/r_0$  и, в частности, не зависит от вязкости. Заметим кстати, что отношение этих «скоростей» не может быть при логарифмическом законе представлено в виде функции  $y/r_0$ . Отсюда следует, что гипотеза о сохранении при всех числах Рейнольдса кинематического подобия для потоков в круглых трубах (на которой была основана формула (6.23)), вообще говоря, неверна. Формулой (6.23) можно пользоваться лишь как приближенной, всякий раз для ограниченного диапазона чисел Рейнольдса.

Из последнего равенства находим:

$$\bar{v} = \bar{v}_{\max} + 2,5 v_* \ln \frac{y}{r_0}.$$

Вычислим, исходя из этой формулы, среднюю по сечению скорость  $v_{\text{ср}}$ :

$$v_{\text{ср}} = \frac{\int_0^{r_0} v \, 2\pi r \, dr}{\pi r_0^2} = \bar{v}_{\max} + \frac{2v_*}{r_0} \int_0^{r_0} 2,5 \ln \frac{y}{r_0} r \, dr.$$

Так как

$$r = r_0 - y, \quad dr = -dy,$$

то при  $r=0$   $y=r_0$ , а при  $r=r_0$   $y=0$ , и последний интеграл равен

$$\begin{aligned}
 2,5 \int_0^{r_0} (r_0 - y) \ln \frac{y}{r_0} dy &= 2,5 r_0 \int_0^{r_0} \ln \frac{y}{r_0} dy - 2,5 \int_0^{r_0} y \ln \frac{y}{r_0} dy = \\
 &= 2,5 \left[ r_0^2 \left( \frac{y}{r_0} \ln \frac{y}{r_0} - \frac{y}{r_0} \right) - r_0^2 \left( \frac{y^2}{2r_0^2} \ln \frac{y}{r_0} - \frac{y^2}{4r_0^2} \right) \right] \Big|_0^{r_0} = \\
 &= 2,5 \left( -r_0^2 + \frac{1}{4} r_0^2 \right) = -2,5 \frac{3}{4} r_0^2;
 \end{aligned}$$

следовательно,

$$v_{cp} = \bar{v}_{max} - 3,75v_*.$$

Никурадзе получил в этом равенстве несколько иной численный коэффициент, так как он вычислял  $v_{cp}$  путем графического интегрирования действительного распределения скоростей, которое вблизи стенки не вполне соответствует формуле (6.28). Формула Никурадзе, которую мы и примем для дальнейших вычислений, имеет вид

$$v_{cp} = \bar{v}_{max} - 4,03v_*.$$

или

$$\frac{\bar{v}_{max} - v_{cp}}{v_*} = 4,03 = \text{const}.$$

Эта формула показывает, что, вообще говоря, нельзя определять среднюю скорость по скорости на оси трубы, исходя из соотношения (6.24). Для того чтобы определить среднюю скорость, необходимо, кроме скорости максимальной (на оси трубы), знать еще величину сопротивления трубы, или, что все равно, величину  $v_*$ ; соотношение (6.24) следует рассматривать лишь как приближенную формулу.

Последнее равенство связывает сопротивление трубы, характеризуемое величиной  $v_*$  со средней и максимальной скоростями. Остается лишь подставить в последнее равенство выражение максимальной скорости через  $v_*$  (формула (6.29)), для того чтобы получить искомый закон сопротивления

$$v_{cp} = 2,5v_* \ln \frac{v_* r_0}{v} + 5,5v_* - 4,03v_*.$$

или

$$\frac{v_{cp}}{v_*} = 2,5 \ln \left( \frac{v_*}{v_{cp}} \frac{v_{cp} r_0}{v} \right) + 1,47. \tag{6.30}$$

Отсюда нетрудно перейти к формуле, в которую вместо  $v_*$  вошел бы коэффициент сопротивления трубы  $\lambda$ . Вспоминая, что

$$\lambda = 4 \frac{\tau_0}{\rho \frac{v_{cp}^2}{2}},$$

находим:

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{\lambda}{8} v_{\text{ср}}^2,$$

и так как  $\tau_0/\rho = v_*^2$ , то

$$\frac{v_*}{v_{\text{ср}}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2,828}.$$

Подставляя последнее выражение в равенство (6.30), получаем:

$$\frac{2,828}{\sqrt{\lambda}} = 2,5 \ln \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{2,828} \cdot \frac{v_{\text{ср}} d}{2\nu} \right) + 1,47.$$

Отсюда, переходя к десятичным логарифмам, находим:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,035 \lg \left( \sqrt{\lambda} \cdot \frac{v_{\text{ср}} d}{\nu} \right) + \frac{1,47 - 5,75 \lg(2 \cdot 2,828)}{2,828},$$

или окончательно:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,035 \lg(R\sqrt{\lambda}) - 1,01,$$

где по-прежнему через  $R$  обозначено  $v_{\text{ср}} d/\nu$ .

Из логарифмического закона распределения скоростей получается, таким образом, универсальная формула для  $\lambda$  логарифмического вида,

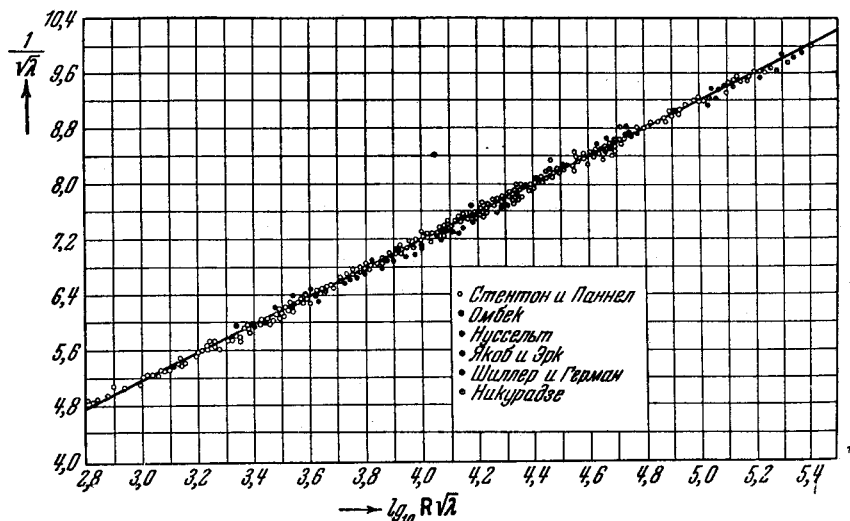


Рис. 6.18. Зависимость  $1/\sqrt{\lambda}$  от  $\lg(R\sqrt{\lambda})$ . Прямая линия соответствует формуле (6.31).

как и закон распределения скоростей. Этот общий вывод теории блестяще подтверждается экспериментальными данными по сопротивлению труб. Оказывается, что если нанести экспериментальные точки в системе координат, в которой по оси абсцисс отложены значения  $\lg(R\sqrt{\lambda})$ , а по оси ординат — значения  $1/\sqrt{\lambda}$ , то все они рас-

полагаются на одной прямой линии, как это и должно быть, согласно последней формуле. Это видно на рис. 6.18, где даны результаты многочисленных опытов разных исследователей. Все эти опыты, вне зависимости от чисел Рейнольдса, удовлетворяют закону линейной зависимости между  $1/\sqrt{\lambda}$  и  $\lg(R\sqrt{\lambda})$ . Никурадзе дает для этой зависимости формулу, коэффициенты которой подобраны из условия

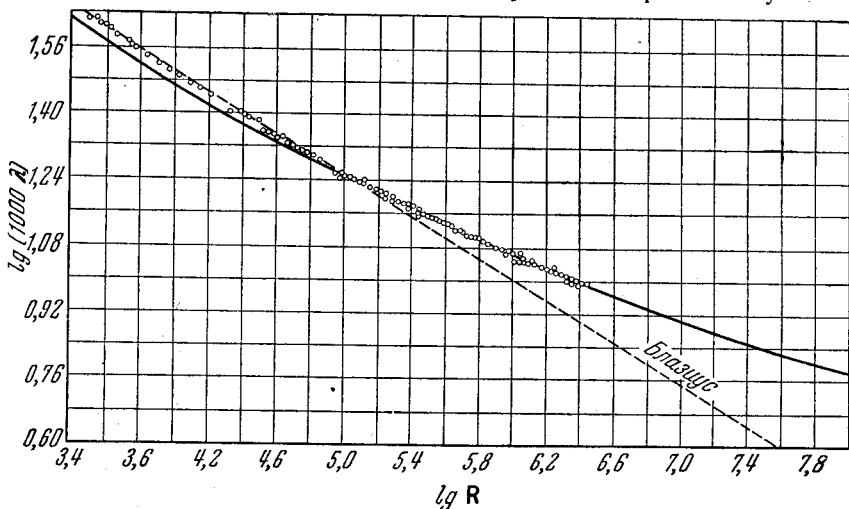


Рис. 6.19. График зависимости  $\lambda$  от числа Рейнольдса, построенный в результате решения универсальной формулы (6.31).

наилучшего соответствия с результатами эксперимента и несколько отличаются от коэффициентов теоретической формулы

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,00 \lg(R\sqrt{\lambda}) - 0,8. \quad (6.31)$$

Прямая, соответствующая этой формуле, изображена на рис. 6.18.

Однако недостатком универсальной формулы является то, что она дает коэффициент сопротивления трубы  $\lambda$  в неявном виде. Поэтому при практическом ее применении приходится решать ее методом последовательных приближений для того, чтобы найти  $\lambda$  с достаточной точностью или, что гораздо проще, пользоваться графиком  $\lambda = f(R)$  (рис. 6.19), который дает значения  $\lambda$ , соответствующие универсальной формуле<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Этот график может быть построен следующим образом: формула (6.31), в которую  $\lambda$  входит в неявном виде, весьма просто решается относительно другого аргумента — числа Рейнольдса  $R$ ; в результате получается:

$$R = \frac{10^{2\sqrt{\lambda} + 0,4}}{\sqrt{\lambda}}.$$

Задаваясь здесь рядом значений  $\lambda$ , можно вычислить соответствующие значения  $R$ , а затем по этим данным построить график.

Более точные результаты, нежели формула (6.31), в особенности при небольших значениях числа Рейнольдса, дает формула Конакова<sup>1)</sup>

$$\lambda = \frac{1}{(1,8 \lg R - 1,5)^2}.$$

Она справедлива при всех числах Рейнольдса, соответствующих турбулентному движению, вплоть до  $R = 3 \cdot 10^6$  и вместе с тем лишена недостатка, присущего формуле (6.31).

### § 11. Движение жидкости по шероховатым трубам

До сих пор предполагалось, что твердая стенка, вдоль которой движется жидкость, является идеально гладкой. В действительности же поверхность стенки почти всегда в той или иной степени шероховата.

Влияние шероховатости стенок на сопротивление трубы видно из рис. 6.20, где представлены результаты опытов Сэфа и Шодера (1903), обработанных так, что за параметр взято число Рейнольдса. Экспериментальные точки, соответствующие технически гладким (тянутым) латунным трубам, вполне удовлетворительно располагаются вдоль прямой, изображающей (в логарифмических масштабах) формулу Блазиуса. Экспериментальные же точки, соответствующие железным оцинкованным трубам, располагаются выше этой прямой и по мере возрастания шероховатости оцинковки дают зависимости, все более отклоняющиеся от формулы Блазиуса. Из этой диаграммы видно, что при больших значениях числа Рейнольдса коэффициент сопротивления железной оцинкованной трубы может быть почти в два раза больше коэффициента сопротивления латунной трубы.

Введение числа Рейнольдса в качестве параметра при обработке экспериментальных данных позволило установить, что шероховатость стенок влияет на характер движения жидкости по-разному, в зависимости от величины числа Рейнольдса. Оказывается, что трубы, которые при малых значениях числа Рейнольдса по величине коэффициента сопротивления могут быть рассматриваемы как технически гладкие, при увеличении числа Рейнольдса обнаруживают все возрастающие отклонения от закона сопротивления гладких труб. При больших числах Рейнольдса даже незначительная шероховатость стенок весьма чувствительно увеличивает коэффициент сопротивления трубы. Это отчетливо видно даже по результатам сравнительно старых опытов Сэфа и Шодера (рис. 6.20): чем больше число Рейнольдса, тем сильнее отклоняются от прямой Блазиуса экспериментальные точки для железных оцинкованных труб.

<sup>1)</sup> Конаков П. К., Новая формула для коэффициента сопротивления гладких труб, Докл. Академии наук, т. LI, № 7, 1946.