

Таким образом, для шероховатых труб универсальный закон распределения скоростей по сечению (универсальный как для всех степеней шероховатости, так и для всех чисел Рейнольдса) имеет вид

$$\frac{\bar{v}}{v_*} = 5,75 \lg \frac{y}{k} = f\left(\frac{v_* k}{\nu}\right). \quad (6.35)$$

## § 12. Сопротивление шероховатых труб с равномерно распределенной зернистой шероховатостью.

### Допустимая шероховатость

Из предыдущего известно, что каждому закону распределения скоростей по сечению соответствует свой закон сопротивления труб. В данном случае мы имеем универсальную формулу (6.35) для распределения скоростей по сечению шероховатой трубы и можем перейти к выводу универсального закона для сопротивления труб с равномерно распределенной зернистой шероховатостью. Ход выкладок будет при этом такой же, как и для гладких труб. Полагая в формуле (6.35)  $y = r_0$ , находим, что скорость на оси трубы  $\bar{v}_{\max}$  определяется следующим равенством:

$$\frac{\bar{v}_{\max}}{v_*} = 5,75 \lg \frac{r_0}{k} = f\left(\frac{v_* k}{\nu}\right). \quad (6.36)$$

Из этого равенства и формулы (6.35) следует:

$$\frac{\bar{v}_{\max} - \bar{v}}{v_*} = -5,75 \lg \frac{y}{r_0}.$$

Как видим, «недостаток скорости» определяется в случае шероховатых труб такой же формулой, как и в случае гладких труб (разница в численном коэффициенте происходит оттого, что в одной формуле применены натуральные логарифмы, а в другой — десятичные). Поэтому местная скорость выражается здесь через максимальную так же, как и для гладких труб:

$$\bar{v} = \bar{v}_{\max} - 5,75 v_* \lg \frac{y}{r_0}.$$

Следовательно, между средней по сечению и максимальной скоростями имеет место в случае шероховатых труб такое же соотношение, которое было выведено для гладких труб:

$$v_{\text{ср}} = \bar{v}_{\max} - 3,75 v_*.$$

Подставим теперь в это равенство вместо  $\bar{v}_{\max}$  его выражение по формуле (6.36) и разделим все равенство почленно на  $v_*$ ; тогда получим:

$$\frac{v_{\text{ср}}}{v_*} = 5,75 \lg \frac{r_0}{k} - 3,75 + f\left(\frac{v_* k}{\nu}\right).$$

Так как по доказанному ранее

$$\frac{v_*}{v_{cp}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2,828},$$

то предыдущему равенству можно придать вид

$$\frac{2,828}{\sqrt{\lambda}} = 5,75 \lg \frac{r_0}{k} - 3,75 + f\left(\frac{v_* k}{\nu}\right),$$

или

$$\frac{2,828}{\sqrt{\lambda}} - 5,75 \lg \frac{r_0}{k} + 3,75 = f\left(\frac{v_* k}{\nu}\right). \quad (6.37)$$

Мы получили, таким образом, универсальный закон для коэффициента сопротивления шероховатой трубы. Следует обратить внимание на то, что здесь фигурирует та же функция  $f(v_* k/\nu)$ , что и в формуле (6.35) для распределения скоростей. Поэтому, если по оси абсцисс отложить  $v_* k/\nu$ , а по оси ординат выражение

$$\frac{2,828}{\sqrt{\lambda}} - 5,75 \lg \frac{r_0}{k} + 3,75, \quad (6.38)$$

то должна получиться такая же кривая, как и для выражения  $\bar{v}/v_* - 5,75 \lg(y/k)$ .

Опыты Никурадзе по измерению сопротивления шероховатых труб прекрасно подтверждают этот вывод. На рис. 6.24, на котором изображены результаты опытов по измерению скоростей, нанесены также (в виде зачерненных кружков) значения выражения (6.38), определенные по экспериментально найденным значениям  $\lambda$ . Как видим, совпадение между обеими зависимостями (для скоростей и для сопротивления) получается весьма хорошее и, следовательно, закон сопротивления, выражаемый формулой (6.37), справедлив для всей области чисел Рейнольдса и для всех значений относительной шероховатости, которые были охвачены опытами Никурадзе.

В частности, для больших значений числа Рейнольдса, для которых  $\lg(v_* k/\nu) > 1,85$  функция  $f(v_* k/\nu)$  сохраняет постоянное значение, равное 8,48. Следовательно, для этих чисел Рейнольдса универсальный закон для сопротивления шероховатых труб принимает вид

$$\frac{2,828}{\sqrt{\lambda}} - 5,75 \lg \frac{r_0}{k} + 3,75 = 8,48$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,0 \lg \frac{r_0}{k} + 1,74. \quad (6.39)$$

В последнем равенстве численные коэффициенты подвергнуты некоторой корректировке с той целью, чтобы эта формула возможно лучше соответствовала экспериментальным результатам, полученным для коэффициента сопротивления шероховатых труб. На практике при расчете трубопроводов приходится пользоваться главным

образом последней формулой, так как числа Рейнольдса обычно таковы, что  $\lg(v_*k/\nu) > 1,85$ .

Гораздо более наглядно, нежели на рис. 6.24, но зато в менее универсальной форме, представлены результаты опытов Никурадзе по определению сопротивления шероховатых труб на рис. 6.25. Этот график удобен и для практического определения коэффициента сопротивления  $\lambda$ , так как на нем  $\lambda$  дано в функции числа Рейнольдса  $R = v_{cp}d/\nu$ , а не в функции величины  $v_*k/\nu$ , в которой  $v_*$  само зависит от  $\lambda$ .

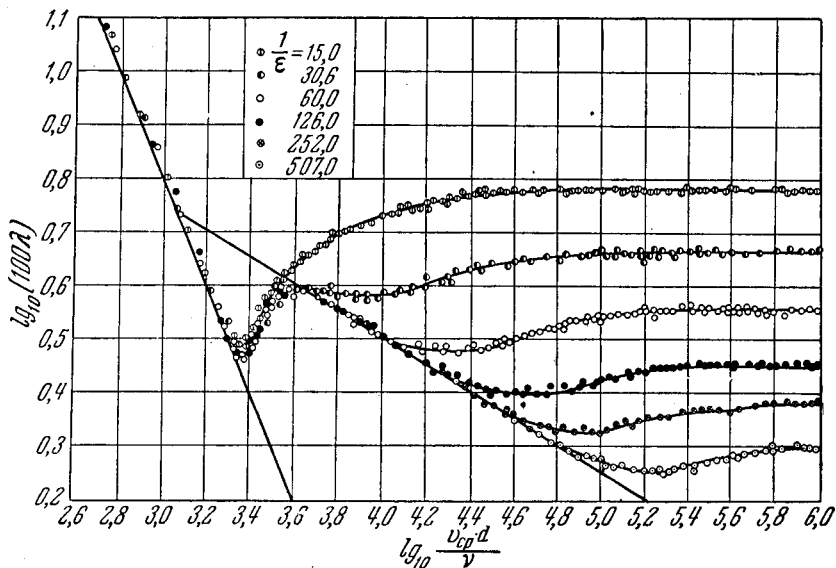


Рис. 6.25. Зависимость коэффициента сопротивления шероховатых труб с равномерно распределенной зернистой шероховатостью от числа Рейнольдса и относительной шероховатости  $\epsilon$  (по опытам Никурадзе).

Каждому значению относительной шероховатости соответствует на этом графике отдельная кривая; зависимость  $\lambda = f(R, \epsilon)$  изображена здесь в виде семейства кривых, построенных по параметру  $\epsilon$ . На этом же графике даны для сопоставления зависимости  $\lambda$  от  $R$  для гладких труб: одна прямая изображает формулу Пуазейля, другая прямая — формулу Блазиуса. Зависимости  $\lambda$  от  $R$  для шероховатых труб совпадают с аналогичными зависимостями для гладких труб при малых числах Рейнольдса и расходятся с ними при больших числах Рейнольдса. Каждому значению относительной шероховатости  $\epsilon$  соответствует в области турбулентного течения число Рейнольдса (оно называется *допустимым* для данной шероховатости), начиная от которого экспериментальная кривая для шероховатой трубы отклоняется от кривой для гладкой трубы. Чем больше величина отно-

сительной шероховатости, тем меньше значение допустимого числа Рейнольдса.

На рис. 6.25 можно отчетливо установить для каждой кривой три области чисел Рейнольдса, отличающихся друг от друга по характеру кривых и режиму обтекания шероховатостей. Первую область составляют малые числа Рейнольдса, при которых коэффициент сопротивления шероховатой трубы одинаков по величине с коэффициентом сопротивления гладкой трубы. Для труб с малой относительной шероховатостью эта область может простираться и до больших чисел Рейнольдса; так, например, из графика видно, что для трубы с относительной шероховатостью  $\epsilon = k/r_0 = 1/507$  коэффициент сопротивления совпадает с коэффициентом сопротивления гладкой трубы до  $\lg R = 4,8$ . В эту первую область входят и числа Рейнольдса, меньшие критического, т. е. такие, при которых движение по трубе ламинарно. Коэффициент сопротивления является в этой области функцией лишь числа Рейнольдса, а от шероховатости трубы не зависит.

Вторую область составляют большие числа Рейнольдса, для которых коэффициент сопротивления определяется формулой (6.39). Как видно из формулы (6.39) и из рис. 6.25, коэффициент сопротивления шероховатой трубы при больших числах Рейнольдса является функцией только относительной шероховатости и не зависит от числа Рейнольдса. Чем больше относительная шероховатость трубы, тем меньше число Рейнольдса, от которого начинается эта область.

Так как в этой области для каждой величины относительной шероховатости  $\lambda = \text{const}$ , то, как вытекает из общей формулы для потерь давления в трубе,

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho v_{\text{ср}}^2 L}{2 d}.$$

сопротивление трубы следует при этом квадратичному закону. Таким образом, *квадратичный закон для сопротивления имеет место лишь для шероховатых труб при больших числах Рейнольдса и наступает тем раньше, чем больше шероховатость трубы.*

Интересные опыты, выясняющие природу квадратичного закона, были выполнены Фейджем<sup>1)</sup>. Он экспериментировал с каналами квадратного сечения, на стенках которых за разгонным участком были укреплены поставленные вплотную друг к другу бугорки пирамидальной формы. Высота бугорков составляла 10,9 мм, относительная шероховатость была равна 0,169. В эксперименте измерялось не только сопротивление канала при прохождении воздуха, но и распределение давления по бугоркам. Оказалось, что когда потери давления в канале изменяются пропорционально квадрату средней скорости, то сопротивление канала представляет собой результирующую от сопротивлений *давления*, приложенных к отдельным бугоркам. Эти опыты

<sup>1)</sup> Fage A., Fluid flow in rough pipes, Aeron Research Committee, Rep. and Mem. № 1585, 1933.

объясняют, почему вязкость и, следовательно, число Рейнольдса не влияют в этой области значений  $R$  на величину коэффициента сопротивления.

Физическая сущность явлений, происходящих при обтекании бугорков, в этой области чисел  $R$  хорошо выясняется опытами Федяевского и Фоминой<sup>1)</sup>. В этих опытах изучалось, наряду с распределением скоростей по сечению и сопротивлением шероховатой трубы, также распределение давления по бугоркам, имевшим форму головок заклепок, при различной густоте их расположения на внутренней поверхности трубы. По результатам этих опытов была вычислена длина пути перемешивания; зависимость  $l/r_0$  от  $y/r_0$  оказалась при этом такой же, как и в трубах с зернистой шероховатостью и в гладких трубах. Это обстоятельство указывает на то, что в рассматриваемой области чисел Рейнольдса механизм турбулентного переноса не зависит от типа шероховатости стенок трубы. Таким образом, опытным путем подтверждается, что универсальная формула (6.17) пригодна для любого состояния поверхности. Кроме того, по измеренному распределению давления было вычислено распределение продольных нагрузок по высоте бугорка и результирующая продольная сила (т. е. сила, направленная вдоль оси трубы), приложенная к бугорку. Оказалось, что при одинаковой скорости на оси трубы, нагрузки, приложенные к бугоркам, быстро убывают с увеличением густоты бугорков. Это свидетельствует о наличии значительного взаимного влияния бугорков друг на друга. Однако если сопоставлять распределение нагрузок при одинаковой скорости у вершины бугорка, то для всех расположений бугорков оно получается практически одинаковым. Таким образом, скорость у вершины бугорка определяет как распределение нагрузок, так и сопротивление бугорка.

Третья область чисел Рейнольдса является переходной между первой областью и второй. Она ограничивается, с одной стороны, числом Рейнольдса, до которого закон сопротивления шероховатой трубы совпадает с законом сопротивления гладкой, с другой стороны, — числом Рейнольдса, за которым имеет место квадратичный закон сопротивления. В этой области коэффициент сопротивления трубы зависит от обоих параметров: от числа Рейнольдса и от относительной шероховатости.

Указанные три области чисел Рейнольдса соответствуют трем различным режимам обтекания шероховатости. В первой области средняя высота бугорков шероховатости в несколько раз меньше толщины ламинарного слоя, и поэтому сопротивление зависит здесь только от вязкости. В переходной области толщина ламинарного слоя есть величина такого же порядка, как и высота бугорков шероховатости. Наконец, во второй области, при больших числах Рейнольдса, высота бугорков шероховатости во много раз больше толщины ламинарного

<sup>1)</sup> Федяевский К. К. и Фомина Н. Н., Исследование влияния шероховатости на сопротивление, Труды ЦАГИ, вып. 441, 1940.

слоя; при обтекании бугорков здесь возникают вихри, которые увеличивают сопротивление трубы.

С помощью графика Никурадзе (рис. 6.25) можно определить для заданного значения числа Рейнольдса величину так называемой «допустимой шероховатости» трубопровода, т. е. такое максимальное значение  $\epsilon$ , при котором шероховатость трубопровода еще не влияет на его сопротивление. Для этого нужно взять на оси абсцисс точку, соответствующую данному числу Рейнольдса, и провести через нее

вертикаль до пересечения с кривой коэффициента сопротивления для гладких труб. Значение допустимой шероховатости будет соответствовать той кривой для коэффициента сопротивления шероховатой трубы, которая отходит в точке пересечения от кривой для гладкой трубы. Например, если  $R = 11\,250$  ( $\lg R = 4,051$ ), то по рис. 6.25 находим  $\epsilon_{\text{доп}} = 1/60 = 0,0167$ . При всех значениях числа Рейнольдса, меньших данного, и при всех  $\epsilon < \epsilon_{\text{доп}}$  шероховатые трубы будут иметь такое же сопротивление, как и гладкие. С возрастанием числа

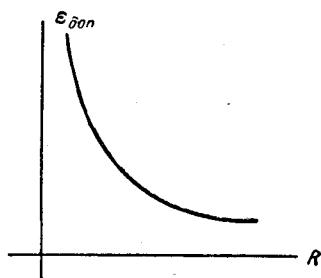


Рис. 6.26. Зависимость допустимой шероховатости трубы от числа Рейнольдса.

Рейнольдса величина допустимой шероховатости убывает (рис. 6.26).

Опыты показывают, что коэффициент сопротивления трубопровода с так называемой *естественной шероховатостью* (т. е. возникшей в результате износа или процесса производства) в переходной области от течения по закону гладкого трубопровода до течения по квадратичному закону не увеличивается, как в случае равномерно распределенной зернистой шероховатости, а плавно убывает. Для этой области можно пользоваться формулой Кольбрука

$$\frac{1}{V\lambda} = -2 \lg \left( \frac{2,51}{R V\lambda} + \frac{k_2}{3,7d} \right),$$

или формулами Альтшуля: логарифмической

$$\frac{1}{V\lambda} = 1,8 \lg \frac{R}{R \frac{k_1}{d} + 7}$$

или степенной

$$\lambda = 0,1 \left( \frac{k_2}{d} + \frac{100}{R} \right)^{0,25},$$

где  $k_2$  — абсолютная шероховатость, эквивалентная зернистой в опытах Никурадзе,  $k_1$  и  $k_2$  — величины, пропорциональные абсолютной шероховатости<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> См. по этому вопросу: Альтшуль А. Д., Закон сопротивления трубопроводов, Докл. Академии наук СССР, т. XXVI, № 6, 1951; его же, К обоснованию формулы Кольбрука, Изв. Академии наук СССР, отд. техн. наук, № 6, 1958; Шевелев Ф. А., Основные гидравлические закономерности турбулентного течения в трубах, Госстройиздат, 1954.