§ 13. Дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости и газа в общем виде

В предыдущих параграфах мы видели, что можно решать некоторые простейшие задачи механики вязкой жидкости (например, задачу о движении жидкости по круглой цилиндрической трубе), не располагая общими уравнениями движения. Однако при переходе к более сложным проблемам и, в частности, к изучению обтекания тел вязкой средой, становятся необходимыми общие уравнения движения. Следует отметить, что они значительно сложнее уравнений движения идеальной жидкости. Дело в том, что в общем случае движения вязкость среды проявляется не только в касательных напряжениях,

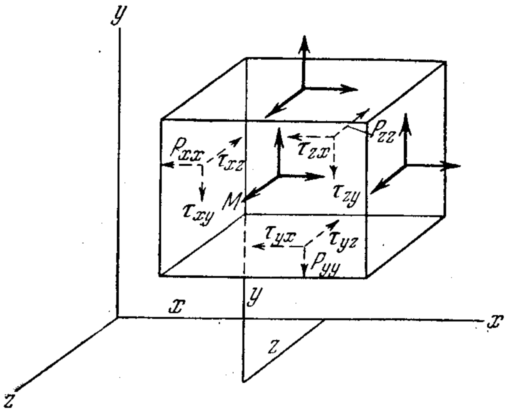

Рис. 6.27. К выводу уравнений движения вязкой жидкости. Стрелками указаны положительные направления для нормальных и касательных напряжений.

но также и в изменениях величин нормальных напряжений (по сравнению с их величинами в идеальной жидкости при тех же условиях). Нормальные напряжения в вязкой среде оказываются зависящими от вязкости и от ориентировки площадки, на которую они действуют. Это обстоятельство и осложняет механику вязкой среды.

Для того чтобы составить дифференциальные уравнения движения, возьмем прямоугольную систему координат и выделим из жидкости элемент в форме прямоугольного параллелепипеда (рис. 6.27). Выражения для массы элемента, проекций его ускорения на оси координат, проекций объемных сил запишутся здесь так же, как и при выводе уравнений Эйлера для идеальной жидкости (гл. V). Отличие от вывода уравнений Эйлера будет иметь место только в выражениях для поверхностных сил. Разложим напряжение поверхностной силы, приложенное к каждой из граней параллелепипеда, на составляющие по осям координат. Для каждой грани получается, таким образом, три составляющих напряжения. Для трех граней, пересекающихся в исходной точке M, составляющих напряжения будет девять. Введем для этих составляющих следующие обозначения. Нормальные напряжения будем обозначать буквой p, касательные — буквой τ; при этом будем снабжать эти буквы двумя значками внизу; одним, указывающим ось, перпендикулярную к рассматриваемой площадке, и другим — указывающим ось, проекцией на которую является данная составляющая напряжения.

Первый значок указывает, таким образом, ориентировку площадки, к которой приложено рассматриваемое напряжение; второй значок имеет такой же смысл, как обычный указатель проекции вектора. Составляющие напряжения по упомянутым трем граням можно записать при этих обозначениях в виде следующей таблицы:

$$\begin{array}{ccc} p_{xx}, & \tau_{xy}, & \tau_{xz}, \\ \tau_{yx}, & p_{yy}, & \tau_{yz}, \\ \tau_{zx}, & \tau_{zy}, & p_{zz}. \end{array}$$

Будем считать нормальные напряжения положительными по знаку, если их направление совпадает с положительным направлением нормали, т. е. если они направлены наружу выделенного элемента и, следовательно, подвергают его всестороннему растяжению. Касательные напряжения будем считать положительными, если для трех граней, пересекающихся в исходной точке M, они направлены в стороны, противоположные положительным направлениям осей координат, а для трех других граней — в стороны, совпадающие с положительными направлениями осей координат, как это изображено на чертеже. Такие условия о знаках нормальных и касательных напряжений являются в данном случае наиболее удобными.

Вычислим проекции на оси координат результирующей поверхностных сил. Вычисления проведем только для проекции поверхностных сил на ось x, так как для других осей они будут аналогичными. Из нормальных составляющих напряжения здесь нужно будет учесть только p_{xx}. Нормальная сила, приложенная к левой грани, равна $-p_{xx}\Delta y\,\Delta z$; нормальная сила, приложенная к правой грани, равна $(p_{xx}+\Delta p_{xx})\,\Delta y\,\Delta z$. Равнодействующая этих сил равна $\Delta p_{xx}\Delta y\,\Delta z$.

Из касательных составляющих напряжения здесь следует учесть τ_{yx} и τ_{zx} (остальные составляющие направлены по осям y и z). Проекция на ось x сил трения, приложенных к задней грани, равна $-\tau_{zx}\,\Delta x\,\Delta y$; проекция на ту же ось сил трения, приложенных к передней грани, равна $(\tau_{zx}+\Delta\tau_{zx})\,\Delta x\,\Delta y$; равнодействующая этих проекций равна $\Delta\tau_{zx}\,\Delta x\,\Delta y$. Аналогично найдем, что проекции на ось x сил трения, приложенных к нижней и верхней граням, приводятся к равнодействующей, равной $\Delta\tau_{yx}\,\Delta x\,\Delta z$.

Суммируя выражения для проекций на ось x сил, приложенных к граням элемента, получим, что результирующая этих проекций равна

$$\left(\frac{\Delta p_{xx}}{\Delta x}+\frac{\Delta\tau_{yx}}{\Delta y}+\frac{\Delta\tau_{zx}}{\Delta z}\right)\Delta x\,\Delta y\,\Delta z.$$

Так как масса элемента равна $\rho\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$, проекция его ускорения на ось x равна dv_x/dt, а проекция на ту же ось объемной силы равна $\rho X\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$, то, записывая, что произведение массы на ускорение равно сумме действующих сил, и разделив равенство почленно на массу элемента, получим:

$$\frac{dv_x}{dt}=X+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\Delta p_{xx}}{\Delta x}+\frac{\Delta\tau_{yx}}{\Delta y}+\frac{\Delta\tau_{zx}}{\Delta z}\right).$$

Переходя здесь к пределу при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, $\Delta z\to 0$ и составляя аналогичным образом уравнения в проекциях на оси y и z, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt}&=X+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right),\\ \frac{dv_y}{dt}&=Y+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right),\\ \frac{dv_z}{dt}&=Z+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\right).\end{aligned}\right\}\tag{6.40}$$

В этих общих уравнениях движения вязкой среды количество неизвестных величин превосходит число уравнений. Займемся поэтому составлением дополнительных зависимостей между неизвестными. Нетрудно доказать, что из девяти составляющих напряжения, которые входят в уравнения (6.40), только шесть являются независимыми, остальные три всегда могут быть через них выражены. В этом можно убедиться, если дополнительно к уравнениям (6.40) для сил составить три уравнения для моментов относительно осей, проходящих через центр объема элемента. Составим, например, такое уравнение для моментов относительно оси, параллельной оси z и проходящей через точку M_1 (рис. 6.28). Пусть $\Delta\mathfrak{M}$ будет момент инерционных сил при относительном движении элемента относительно этой оси. Уравнение моментов тогда запишется в виде

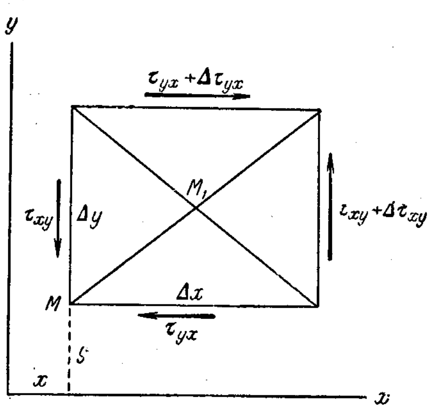

Рис. 6.28. К выводу свойства взаимности касательных напряжений.

$$\Delta\mathfrak{M}-\tau_{yx}\,\Delta x\,\Delta z\,\frac{\Delta y}{2}-(\tau_{yx}+\Delta\tau_{yx})\,\Delta x\,\Delta z\,\frac{\Delta y}{2}+\tau_{xy}\,\Delta y\,\Delta z\,\frac{\Delta x}{2}+$$
$$+(\tau_{xy}+\Delta\tau_{xy})\,\Delta y\,\Delta z\,\frac{\Delta x}{2}=0.$$

Моменты от объемных сил и от нормальных составляющих поверхностных сил не входят сюда, так как можно считать, что равнодействующие этих сил проходят через точку M_1. Разделим это уравнение почленно на объем элемента Δx, Δy, Δz; тогда оно примет вид

$$-\frac{\Delta\mathfrak{M}}{\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}=(\tau_{xy}-\tau_{yx})+\frac{1}{2}(\Delta\tau_{xy}-\Delta\tau_{yx}).$$

Перейдем теперь в этом равенстве к пределу, приближая размеры элемента к нулю, т. е. стягивая его к исходной точке M_1. Так как момент инерционных сил есть величина четвертого порядка малости (если линейные размеры элемента Δx, Δy, Δz считать за малые величины первого порядка), то левая часть в последнем равенстве будет стремиться к нулю. То же самое относится к последним двум слагаемым в правой части. После перехода к пределу получим:

$$\tau_{xy}-\tau_{yx}=0,$$

откуда

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}.$$

Аналогично можно доказать, что

$$\tau_{yz}=\tau_{zy},\quad \tau_{zx}=\tau_{xz}.$$

Последние три равенства выражают так называемое свойство взаимности касательных напряжений в вязкой среде, которое можно формулировать так: *касательные напряжения, приложенные к двум взаимно перпендикулярным площадкам, проходящим через некоторую точку, и действующие в плоскости, перпендикулярной к обеим площадкам, равны между собою.*

Вследствие этих равенств напряжения по трем взаимно перпендикулярным площадкам, проходящим через некоторую точку в жидкости, характеризуются не девятью, как указывалось выше, а шестью величинами. Можно доказать, что эти же шесть величин определяют напряжение поверхностной силы по любой другой площадке, проходящей через ту же точку. Таким образом, *напряженное состояние среды в любой точке характеризуется шестью величинами: тремя нормальными напряжениями и тремя касательными* по трем взаимно перпендикулярным площадкам, проходящим через эту точку.

Здесь имеется полная аналогия с шестью величинами, определяющими движение деформации в данной точке. Как известно из кинематики жидкости (гл. IV, § 4), скорость деформации в данной точке характеризуется тремя производными: $\partial v_x/\partial x$, $\partial v_y/\partial y$, $\partial v_z/\partial z$, представляющими собой скорости линейной деформации по трем взаимно перпендикулярным направлениям, исходящим из данной точки, и тремя полускоростями скашивания углов: ε_x, ε_y, ε_z. Кроме деформационного движения, частица может иметь, как мы знаем, только поступательное и вращательное движения (теорема Гельмгольца). Однако при этих движениях разные точки одной и той же частицы не могут перемещаться друг относительно друга так, чтобы при этом изменялись расстояния между ними, как это имеет место при деформационном движении. Силы же вязкости проявляются только при наличии перемещений точек в частице, не связанных с движением частицы в целом. Силы вязкости считаются поэтому связанными с деформационным движением. *Основной гипотезой*, на которой построена современная теория движения вязкой среды, является гипотеза о том, *что напряжения, происходящие от вязкости, пропорциональны соответствующим скоростям деформации*. В простейшем виде эта гипотеза была высказана еще Ньютоном.

Закон Ньютона для касательных напряжений при течении жидкости параллельными слоями заключается, как известно, в том, что касательное напряжение равно произведению коэффициента вязкости на градиент скорости:

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial n}.$$

Нетрудно видеть, что градиент скорости $\partial v/\partial n$ представляет собою скорость деформации частицы, именно скорость деформации сдвига или скашивания угла. В самом деле, если выделим в жидкости частицу, проекция которой имеет в начальный момент форму прямоугольника $ABCD$ (рис. 6.29), то вследствие того, что скорость верхней стороны прямоугольника отличается от скорости его нижней стороны на величину Δv, частица через единицу времени примет форму $AB'C'D$. Угловая скорость поворота ребра AB вокруг точки A будет при этом равна $\partial v/\partial n$ (в пределе, при $\Delta n \to 0$). Так как движение прямолинейно и ребро AD не вращается вокруг точки A, то скорость уменьшения прямого угла при точке A также равна $\partial v/\partial n$. Следовательно, в данном случае

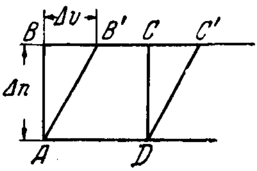

Рис. 6.29. Деформация элемента при движении жидкости параллельными слоями.

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial n},$$

причем ось z считается направленной перпендикулярно к плоскости чертежа. Формуле Ньютона можно теперь придать вид

$$\tau = 2\mu\varepsilon_z. \tag{6.41}$$

Здесь записано в явной форме, что напряжение, происходящее от вязкости, пропорционально скорости деформации.

Примем теперь эту гипотезу и для общего случая движения и выразим компоненты сил вязкости через скорости деформации[1]). Выведем сначала формулу для напряжения силы вязкости по площадке, проходящей через данную точку и ориентированной произвольным образом.

[1]) Заметим, что гипотеза пропорциональности между силами вязкости и скоростями деформации аналогична закону Гука, принятому в сопротив-