§ 14. Напряжения силы вязкости. Эллипсоид напряжений, происходящих от вязкости

Если среда идеальна, то касательные напряжения равны нулю, а нормальные одинаковы для всех площадок, проходящих через данную точку:

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p.$$

При движении реальной (вязкой) жидкости возникают касательные напряжения и изменяются (по сравнению с идеальной жидкостью) нормальные. Будем считать, что как касательные напряжения, так и изменения, происшедшие в величине нормальных напряжений, *не зависят от давления* p (гипотеза Максвелла). Тогда мы можем представить нормальные напряжения при движении вязкой жидкости в виде суммы двух слагаемых: одного, равного $-p$, и другого, происходящего только от вязкости и не зависящего от p (мы будем обозначать его буквой k с соответствующими индексами):

$$p_{xx} = -p + k_{xx}, \qquad p_{yy} = -p + k_{yy}, \qquad p_{zz} = -p + k_{zz}.$$

Напряжения, которые мы обозначаем буквами τ и k, можно назвать *напряжениями силы вязкости.*

Выделим при произвольно взятой внутри жидкости точке M элементарный тетраэдр, построенный на отрезках Δx, Δy, Δz, как показано на рис. 6.30. Составим для него уравнения движения. Так как давления в идеальной жидкости не зависят от ориентировки площадки, т. е. в данном случае одинаковы для всех четырех граней, то их при составлении уравнений движения можно не учитывать: они взаимно уравновешиваются. Из поверхностных сил следует учитывать лишь силы вязкости. Обозначим через l направление нормали к площадке $M_1M_2M_3$ и через k_l — направление силы вязкости по этой площадке; вектор $\boldsymbol{k}_l$ имеет, вообще говоря, нормальные и касательные составляющие и направлен под некоторым углом к площадке $M_1M_2M_3$. Пусть далее k_{lx}, k_{ly}, k_{lz} будут

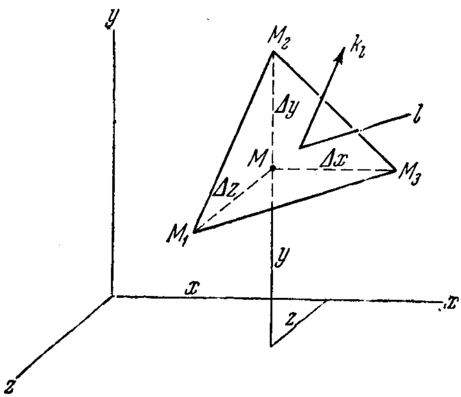

Рис. 6.30. К выводу формулы для напряжения силы вязкости.

лении материалов и теории упругости. Разница заключается лишь в том, что для упругого тела, по закону Гука, силы пропорциональны деформациям, а для жидкости принимается, что силы пропорциональны *скоростям* деформации. Без такого видоизменения закон Гука к жидкостям неприложим, так как в жидкостях вследствие подвижности частиц малые силы вызывают конечные деформации.

проекции вектора $\boldsymbol{k}_l$ на оси координат, а ΔS_x, ΔS_y, ΔS_z, ΔS — величины площадок, ограничивающих тетраэдр и перпендикулярных соответственно к осям x, y, z, l. Уравнение движения тетраэдра в проекции, например, на ось x, запишется в виде

$$\rho\Delta V\frac{dv_x}{dt}=\rho X\Delta V-k_{xx}\Delta S_x-\tau_{yx}\Delta S_y-\tau_{zx}\Delta S_z+k_{lx}\Delta S,$$

где ΔV есть объем тетраэдра.

Деля это уравнение почленно на ΔS, устремляя размеры элемента к нулю и замечая, что отношение $\Delta V/\Delta S$ будет также стремиться при этом к нулю, получим в пределе из этого уравнения следующее:

$$k_{lx}=k_{xx}\frac{\Delta S_x}{\Delta S}+\tau_{yx}\frac{\Delta S_y}{\Delta S}+\tau_{zx}\frac{\Delta S_z}{\Delta S}.$$

Но так как

$$\frac{\Delta S_x}{\Delta S}=\cos(\widehat{l,x}),\qquad\frac{\Delta S_y}{\Delta S}=\cos(\widehat{l,y}),\qquad\frac{\Delta S_z}{\Delta S}=\cos(\widehat{l,z}),$$

то

$$k_{lx}=k_{xx}\cos(\widehat{l,x})+\tau_{yx}\cos(\widehat{l,y})+\tau_{zx}\cos(\widehat{l,z}).$$

Аналогично, рассматривая уравнения для проекций на ось y и z, найдем, что

$$k_{ly}=\tau_{xy}\cos(\widehat{l,x})+k_{yy}\cos(\widehat{l,y})+\tau_{zy}\cos(\widehat{l,z}),$$

$$k_{lz}=\tau_{xz}\cos(\widehat{l,x})+\tau_{yz}\cos(\widehat{l,y})+k_{zz}\cos(\widehat{l,z}).$$

Вычислим теперь модуль вектора $\boldsymbol{k}_l$; для этого спроектируем на направление l составляющие этого вектора k_{lx}, k_{ly}, k_{lz} и сложим их; тогда получим:

$$k_l=k_{lx}\cos(\widehat{l,x})+k_{ly}\cos(\widehat{l,y})+k_{lz}\cos(\widehat{l,z}),$$

или, подставляя вместо k_{lx}, k_{ly}, k_{lz} их выражения, будем иметь:

$$\begin{aligned}k_l=k_{xx}\cos^2(\widehat{l,x})+k_{yy}\cos^2(\widehat{l,y})+k_{zz}\cos^2(\widehat{l,z})&+\\+2\tau_{xy}\cos(\widehat{l,x})\cos(\widehat{l,y})+2\tau_{yz}\cos(\widehat{l,y})\cos(\widehat{l,z})&+\\+2\tau_{xz}\cos(\widehat{l,x})\cos(\widehat{l,z}).&\qquad(6.42)\end{aligned}$$

Таким образом, доказано, что напряжение силы вязкости по любой площадке, проходящей через рассматриваемую точку в жидкости, определяется шестью величинами: k_{xx}, k_{yy}, k_{zz}, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{xz}. Формула здесь получилась вполне аналогичной формуле для удельной скорости деформации жидкости в направлении l (гл. IV, § 6). Поэтому преобразованиями, аналогичными тем, которые были проведены в кинематике жидкости для выражения скорости деформации, можно доказать, что откладывая от рассматриваемой точки во всяком направлении вектор, равный по модулю $1/\sqrt{k_l}$, получим геометрическое место концов этого вектора, определяемое уравнением

$$k_{xx}x_1^2 + k_{yy}y_1^2 + k_{zz}z_1^2 + 2\tau_{xy}x_1y_1 + 2\tau_{yz}y_1z_1 + 2\tau_{xz}x_1z_1 = 1.$$

Здесь x_1, y_1, z_1 суть координаты конца вектора в системе, которая получается из системы x, y, z переносом начала координат в рассматриваемую точку. Это геометрическое место представляет собой эллипсоид; он называется *эллипсоидом напряжений* в данной точке (точнее, эллипсоидом напряжений силы вязкости). Если взять в качестве системы координат главные оси этого эллипсоида ξ, η, ζ, то его уравнение будет иметь вид

$$k_{\xi\xi}\xi^2 + k_{\eta\eta}\eta^2 + k_{\zeta\zeta}\zeta^2 = 1,$$

и для определения напряжения силы вязкости по любой площадке достаточно будет только трех величин $k_{\xi\xi}$, $k_{\eta\eta}$, $k_{\zeta\zeta}$:

$$k_l = k_{\xi\xi}\cos^2(\widehat{\xi, l}) + k_{\eta\eta}\cos^2(\widehat{\eta, l}) + k_{\zeta\zeta}\cos^2(\widehat{\zeta, l}).$$

Напряжения $k_{\xi\xi}$, $k_{\eta\eta}$, $k_{\zeta\zeta}$ называются *главными напряжениями* в данной точке.

§ 15. Дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости в форме Навье — Стокса. Условия подобия потоков вязкой жидкости

Вернемся теперь к гипотезе о зависимости между напряжениями, происходящими от вязкости, и скоростями деформации; предположим, что напряжение k_l для всех направлений l, исходящих из данной точки, пропорционально соответствующим удельным скоростям деформации, причем коэффициент пропорциональности одинаков для всех направлений и всех точек в среде и равен 2μ, т. е. такой же, как в формуле Ньютона (6.41):

$$k_l = 2\mu\frac{\partial v_l}{\partial l}. \qquad (6.43)$$

Более подробное исследование показывает, что в таком простом виде можно записывать гипотезу о пропорциональности напряжений и скоростей деформации лишь для несжимаемой жидкости. В случае сжимаемой жидкости нормальные напряжения сил вязкости зависят (линейно) не только от скорости линейной деформации в направлении действия напряжения, но также и от скорости линейной деформации по направлениям, перпендикулярным к направлению действия напряжения. Мы рассмотрим сначала случай несжимаемой жидкости; под этот случай подходят, как известно, и газы при малых значениях числа M.