вектор, равный по модулю $1/\sqrt{k_l}$, получим геометрическое место концов этого вектора, определяемое уравнением

$$k_{xx}x_1^2 + k_{yy}y_1^2 + k_{zz}z_1^2 + 2\tau_{xy}x_1y_1 + 2\tau_{yz}y_1z_1 + 2\tau_{xz}x_1z_1 = 1.$$

Здесь $x_1$, $y_1$, $z_1$ суть координаты конца вектора в системе, которая получается из системы $x$, $y$, $z$ переносом начала координат в рассматриваемую точку. Это геометрическое место представляет собой эллипсоид; он называется *эллипсоидом напряжений* в данной точке (точнее, эллипсоидом напряжений силы вязкости). Если взять в качестве системы координат главные оси этого эллипсоида $\xi$, $\eta$, $\zeta$, то его уравнение будет иметь вид

$$k_{\xi\xi}\xi^2 + k_{\eta\eta}\eta^2 + k_{\zeta\zeta}\zeta^2 = 1,$$

и для определения напряжения силы вязкости по любой площадке достаточно будет только трех величин $k_{\xi\xi}$, $k_{\eta\eta}$, $k_{\zeta\zeta}$:

$$k_l = k_{\xi\xi}\cos^2(\widehat{\xi, l}) + k_{\eta\eta}\cos^2(\widehat{\eta, l}) + k_{\zeta\zeta}\cos^2(\widehat{\zeta, l}).$$

Напряжения $k_{\xi\xi}$, $k_{\eta\eta}$, $k_{\zeta\zeta}$ называются *главными напряжениями* в данной точке.

## § 15. Дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости в форме Навье — Стокса. Условия подобия потоков вязкой жидкости

Вернемся теперь к гипотезе о зависимости между напряжениями, происходящими от вязкости, и скоростями деформации; предположим, что напряжение $k_l$ для всех направлений $l$, исходящих из данной точки, пропорционально соответствующим удельным скоростям деформации, причем коэффициент пропорциональности одинаков для всех направлений и всех точек в среде и равен $2\mu$, т. е. такой же, как в формуле Ньютона (6.41):

$$k_l = 2\mu\frac{\partial v_l}{\partial l}. \tag{6.43}$$

Более подробное исследование показывает, что в таком простом виде можно записывать гипотезу о пропорциональности напряжений и скоростей деформации лишь для несжимаемой жидкости. В случае сжимаемой жидкости нормальные напряжения сил вязкости зависят (линейно) не только от скорости линейной деформации в направлении действия напряжения, но также и от скорости линейной деформации по направлениям, перпендикулярным к направлению действия напряжения. Мы рассмотрим сначала случай несжимаемой жидкости; под этот случай подходят, как известно, и газы при малых значениях числа M.

Сопоставим выражение (6.42) для $k_l$ с формулой (4.26), которая имеет вид

$$\frac{\partial v_l}{\partial l}=\frac{\partial v_x}{\partial x}\cos^2(\widehat{l,x})+\frac{\partial v_y}{\partial y}\cos^2(\widehat{l,y})+\frac{\partial v_z}{\partial z}\cos^2(\widehat{l,z})+ \\ +2\varepsilon_z\cos(\widehat{x,l})\cos(\widehat{y,l})+2\varepsilon_x\cos(\widehat{y,l})\cos(\widehat{z,l})+ \\ +2\varepsilon_y\cos(\widehat{x,l})\cos(\widehat{z,l}).$$

Величины $k_l$ и $\partial v_l/\partial l$ должны быть, согласно равенству (6.43), пропорциональны друг другу при всех направлениях $l$; иными словами, равенство (6.43) должно выполняться тождественно. Это возможно лишь в том случае, если в последнем равенстве и в формуле (6.42) соответствующие коэффициенты при косинусах пропорциональны друг другу, причем коэффициент пропорциональности равен $2\mu$, т. е. если

$$\tau_{xy}=2\mu\varepsilon_z=\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right),\qquad \tau_{yz}=2\mu\varepsilon_x=\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z}\right), \\ \tau_{zx}=2\mu\varepsilon_y=\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right). \tag{6.44}$$

Для нормальных напряжений в потоке вязкой несжимаемой жидкости получаем следующие формулы:

$$p_{xx}=-p+2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x},\quad p_{yy}=-p+2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y},\quad p_{zz}=-p+2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z}. \tag{6.45}$$

Из этих формул вытекает, что в вязкой несжимаемой жидкости сумма нормальных напряжений по любым трем взаимно перпендикулярным площадкам, проходящим через данную точку, не зависит ни от сил вязкости, ни от ориентировки этих площадок. В самом деле,

$$p_{xx}+p_{yy}+p_{zz}=-3p+2\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right).$$

Но для несжимаемой жидкости выражение в скобках обращается в нуль вследствие уравнения неразрывности и, следовательно,

$$p_{xx}+p_{yy}+p_{zz}=-3p,$$

что и доказывает независимость этой суммы от вязкости и ориентировки площадок. Из последнего выражения, кроме того, следует, что *давление в вязкой жидкости можно определить как взятое с обратным знаком среднее арифметическое из нормальных напряжений по любым трем взаимно перпендикулярным площадкам, проходящим через данную точку:*

$$p=-\frac{p_{xx}+p_{yy}+p_{zz}}{3}.$$

Мы располагаем теперь необходимыми дополнительными равенствами для того, чтобы в уравнениях движения привести в соответствие число неизвестных с числом уравнений. Подставим в уравнение (6.40) вместо нормальных и касательных напряжений их выражения (6.44) и (6.45). Первое из уравнений (6.40) тогда примет вид

$$\frac{dv_x}{dt}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\left(2\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y\,\partial x}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z\,\partial x}\right);$$

но так как

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y\,\partial x}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=0$$

вследствие несжимаемости жидкости, то можно написать, что

$$\frac{dv_x}{dt}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right).$$

Выполняя аналогичные преобразования со вторым и третьим уравнениями (6.40) и заменяя везде отношение $\mu/\rho$ кинематическим коэффициентом вязкости $\nu$, получим следующую систему уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt}&=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right),\\ \frac{dv_y}{dt}&=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right),\\ \frac{dv_z}{dt}&=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right).\end{aligned}\right\}\qquad(6.46)$$

Уравнения движения для вязкой сжимаемой жидкости значительно отличаются от уравнений движения для вязкой несжимаемой жидкости. Дело в том, что в случае вязкой сжимаемой жидкости приходится вводить наряду с коэффициентом вязкости $\mu$ также другой коэффициент, характеризующий влияние вязкости; мы обозначим этот коэффициент через $\lambda'$. Если предположить, по аналогии с тем, как это имеет место для несжимаемой жидкости, что и в газе давление в каждой точке есть взятое с обратным знаком среднее арифметическое из нормальных напряжений, приложенных к трем взаимно перпендикулярным площадкам, проходящим через данную точку, то можно доказать, что $\lambda'=-\frac{2}{3}\cdot\mu$ [1]). Оба эти коэффициента вязкости ($\mu$ и $\lambda'$) зависят от давления и температуры и поэтому в потоке газа являются величинами переменными.

---

[1]) В действительности $\lambda'+\frac{2}{3}\mu\neq 0$, но является величиной пренебрежимо малой. В кинетической теории газов доказывается, что для одноатомных газов отношение $\dfrac{\lambda'+\frac{2}{3}\mu}{\mu}$ имеет величину такого же порядка, как квадрат отношения объема, занятого молекулами, к объему газа.

В потоке газа нормальные напряжения связаны со скоростями деформации несколько более сложными соотношениями, чем формулы (6.45), а именно:

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= -p + 2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda'\operatorname{div}\boldsymbol{v},\\ p_{yy} &= -p + 2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y} + \lambda'\operatorname{div}\boldsymbol{v},\\ p_{zz} &= -p + 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda'\operatorname{div}\boldsymbol{v}. \end{aligned}\right\} \tag{6.47}$$

Если подставить эти выражения и выражения (6.44) в равенства (6.40), то уравнения движения вязкой сжимаемой жидкости будут тогда иметь следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda'\operatorname{div}\boldsymbol{v}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\right] + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\right],\\ \frac{dv_y}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y} + \lambda'\operatorname{div}\boldsymbol{v}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)\right] + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\right],\\ \frac{dv_z}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda'\operatorname{div}\boldsymbol{v}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\right] + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{6.48}$$

Если жидкость несжимаема, то

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0, \qquad \mu = \text{const}$$

и из последних уравнений получаются, как частный случай, уравнения (6.46).

Уравнения (6.48), так же как и их частный случай — уравнения (6.46), называются *уравнениями Навье — Стокса.* Они впервые были выведены французскими учеными Навье (1822) и Пуассоном (1829) на основании соображений о действии молекулярных сил. Впоследствии, в 1845 г., английский ученый Стокс дал иной вывод, близкий к вышеизложенному, построенный на гипотезе Ньютона о пропорциональности вязких напряжений скоростям деформации. Уравнения Навье—Стокса можно рассматривать как обобщение на случай вязкой жидкости уравнений Эйлера для идеальной жидкости. В самом деле, если положить в уравнениях Навье—Стокса коэффициенты вязкости $\mu$ и $\lambda'$ равными нулю, то из них получаются, как частный случай, уравнения Эйлера.

Все слагаемые в уравнениях Навье—Стокса, так же как и в уравнениях Эйлера, имеют размерность ускорения; в левые части входят проекции полного ускорения частицы, в правые части — проекции ускорения от объемных сил, от сил гидродинамического давления и от сил вязкости.

В уравнениях Навье—Стокса неизвестными величинами являются компоненты скорости $v_x$, $v_y$, $v_z$, давление $p$ и в общем случае сжимаемой жидкости также плотность $\rho$. Для того чтобы получилась полная система уравнений (т. е. такая система, в которой число уравнений равно числу неизвестных), необходимо к уравнениям Навье — Стокса присоединить уравнение неразрывности движения

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0,$$

а в общем случае сжимаемой жидкости — еще характеристическое уравнение

$$\rho=f(p,\ T),$$

где $T$ есть абсолютная температура в данной точке, и уравнение переноса энергии (см. следующий параграф).

При решении этой системы уравнений для какой-нибудь конкретной задачи необходимо учесть начальные и граничные условия данной задачи. Начальные условия формулируются для случая вязкой жидкости так же, как и для случая идеальной. Они сводятся к тому, что если движение является неустановившимся, то для некоторого момента времени, принимаемого за начальный, задаются скорости, давления, температуры и плотности как функции координат. Существенные отличия от идеальной жидкости имеют место при формулировке граничных условий. В теории идеальной жидкости допускается, что жидкость скользит по поверхности обтекаемого тела с некоторой конечной относительной скоростью. Если же твердое тело обтекается вязкой жидкостью, то, по современным воззрениям и опытным данным, частицы жидкости *прилипают к поверхности тела*, и следовательно, не только нормальные, но и касательные составляющие векторов скорости жидкости и тела должны быть одинаковыми в точках на поверхности тела. Обозначив скорость жидкости в данной точке через $\boldsymbol{v}$, а скорость тела — через $\boldsymbol{u}$, можно записать граничное условие для задач, относящихся к вязкой жидкости, в виде равенства

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}$$

на поверхности твердого тела, или, что равносильно,

$$v_n=u_n, \qquad v_s=u_s.$$

В частном случае, если вязкая жидкость обтекает неподвижное тело, то на его поверхности

$$v_n=0, \qquad v_s=0.$$

Можно непосредственно убедиться в том, что последнее условие соответствует действительности, если измерить (например, с помощью микротрубок полного и статического давлений) распределение скорости вблизи тела. При приближении измерителя скорости к поверхности тела скорость быстро убывает, стремясь к нулю.

Последнее граничное условие ($v_s=0$) весьма затрудняет решение задач, относящихся к движению вязкой жидкости. Оно вносит гораздо большие осложнения, нежели добавочные члены в уравнениях Навье—Стокса. Можно думать, что именно вследствие трудностей, сопряженных с необходимостью удовлетворить это дополнительное граничное условие (которого нет в теории идеальной жидкости), мы имеем до сих пор чрезвычайно мало точных решений уравнений Навье—Стокса.

В связи с этим любопытно отметить один класс движений, для которого существует общий интеграл уравнений Навье—Стокса, однако граничное условие $v_s=0$ на поверхности тела, вообще говоря, не удовлетворяется. Мы имеем в виду движение с потенциалом скоростей. Предположим, что вязкая несжимаемая жидкость движется так, что существует потенциал скоростей $\varphi$, т. е. имеют место равенства

$$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\qquad v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\qquad v_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

В этом случае слагаемые в уравнениях (6.46), происходящие от вязкости, будут равны

$$\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)=\nu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)=0,$$
$$\nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)=\nu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)=0,$$
$$\nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)=\nu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)=0,$$

так как для несжимаемой жидкости потенциал скоростей удовлетворяет уравнению Лапласа.

Уравнения (6.46) тождественны в этом случае с уравнениями Эйлера и, следовательно, для потенциального движения могут быть проинтегрированы. В результате получается, как известно (гл. V, § 4), интеграл Лагранжа

$$p+\gamma z+\frac{\rho v^2}{2}+\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}=C(t).$$

Однако граничному условию $v_s=0$ на поверхности тела потенциальное движение не удовлетворяет, и следовательно, безоговорочно пользоваться интегралом Лагранжа в этом случае нельзя.

Из этого примера следует, что вязкая несжимаемая жидкость не может двигаться с потенциалом скоростей во всей занимаемой ею области, так как при этом не удовлетворяются все граничные условия (не говоря уже о том, что при этом не проявляются силы вязкости и, следовательно, имеет место парадокс Даламбера). Если же мысленно выделить пограничную с телом область, то во всем остальном пространстве, занятом жидкостью, может иметь место потенциальное движение, ибо для этого пространства $\boldsymbol{v}$ на границах не равно нулю. При этом реальная жидкость будет двигаться в этом пространстве так же, как двигалась бы идеальная. Все законы движения идеальной жидкости (в том числе и интеграл Лагранжа) применимы к этой области, внешней по отношению к пограничной. Что же касается пограничной области, то в ней движение не может быть потенциальным, следовательно, поток в этой области завихренный и жидкость, даже в случае малой вязкости, нельзя рассматривать как идеальную. Дальнейшее развитие изложенных здесь соображений приводит, как увидим, к теории пограничного слоя.

Для некоторых целей можно использовать уравнения Навье — Стокса, даже не интегрируя их; так, например, из уравнений Навье — Стокса можно весьма просто вывести все условия подобия потоков вязкой жидкости, полученные ранее из иных соображений.

Приведем предварительно уравнения Навье — Стокса к безразмерному виду. Пусть $L$ будет некоторая, характерная для данного потока длина (например, размер тела, находящегося в потоке), а $T$ — некоторый, характерный для данного потока промежуток времени (мы имеем в виду общий случай, когда поток является неустановившимся). Можно назвать $L$ и $T$ масштабами соответственно длины и времени. Текущие координаты $x$, $y$, $z$ и время $t$ можно выразить через эти масштабы с помощью безразмерных коэффициентов $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $\tau$:

$$x=\xi L, \qquad y=\eta L, \qquad z=\zeta L, \qquad t=\tau T.$$

Аналогично, выбрав в качестве масштаба скоростей скорость потока на бесконечности $V$, в качестве масштаба давлений и плотностей — соответственно давление $p_0$ и плотность $\rho_0$ в какой-либо фиксированной точке и, наконец, в качестве масштаба для ускорения объемных сил — ускорение силы тяжести $g$, сможем написать:

$$\begin{aligned} v&=\bar{v}V, & p&=\bar{p}p_0, & \rho&=\bar{\rho}\rho_0,\\ X&=\bar{X}g, & Y&=\bar{Y}g, & Z&=\bar{Z}g, \end{aligned}$$

где буквами с чертой наверху обозначены соответствующие безразмерные коэффициенты.

Подставим теперь эти выражения в уравнения Навье — Стокса (6.48), примем $\lambda'=-2/3\mu=\text{const}$ и возьмем в качестве независимых переменных $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $\tau$. Все преобразования выполним при этом лишь с первым из уравнений Навье — Стокса; для остальных двух уравнений они совершенно аналогичны и приводят к таким же результатам, что и преобразования первого уравнения. Представим это уравнение в развернутом виде, заменив проекцию полного ускорения $dv_x/dt$ суммой локального и конвективного ускорений (гл. V, формула (5.3)):

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+$$
$$+\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)+\frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right).$$

Так как

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}=\frac{V^2}{L}\left(\bar{v}_x\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \xi}+\bar{v}_y\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \eta}+\bar{v}_z\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \zeta}\right),$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}=\frac{V}{T}\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \tau}, \qquad \frac{\partial p}{\partial x}=\frac{p_0}{L}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}=\frac{V}{L^2}\left(\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial \zeta^2}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=\frac{V}{L^2}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \xi}+\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \eta}+\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \zeta}\right),$$

то после перехода к безразмерным переменным первое уравнение Навье — Стокса примет вид

$$\frac{V}{T}\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial\tau}+\frac{V^2}{L}\left(\bar{v}_x\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial\xi}+\bar{v}_y\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial\eta}+\bar{v}_z\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial\zeta}\right)=g\bar{X}-\frac{p_0}{\rho_0 L}\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\xi}+$$
$$+\frac{\nu V}{L^2}\left[\frac{\partial^2\bar{v}_x}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\bar{v}_x}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\bar{v}_x}{\partial\zeta^2}+\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial\xi}+\frac{\partial\bar{v}_y}{\partial\eta}+\frac{\partial\bar{v}_z}{\partial\zeta}\right)\right].$$

При каждом члене этого уравнения имеется множитель, содержащий масштабы; уравнение, следовательно, однородно относительно этих множителей, и поэтому из него могут быть определены только их отношения. Разделим это уравнение почленно, например на $V^2/L$ (множитель при конвективном ускорении); уравнение примет тогда безразмерный вид:

$$\frac{L}{VT}\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial\tau}+\bar{v}_x\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial\xi}+\bar{v}_y\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial\eta}+\bar{v}_z\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial\zeta}=\frac{gL}{V^2}\bar{X}-\frac{p_0}{\rho_0 V^2}\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\xi}+$$
$$+\frac{\nu}{VL}\left[\frac{\partial^2\bar{v}_x}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\bar{v}_x}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\bar{v}_x}{\partial\zeta^2}+\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial\xi}+\frac{\partial\bar{v}_y}{\partial\eta}+\frac{\partial\bar{v}_z}{\partial\zeta}\right)\right].$$

Если для двух потоков, обтекающих геометрически подобные тела, уравнения движения, написанные в безразмерной форме, одинаковы, то эти потоки динамически подобны, и наоборот, если потоки динамически подобны, то их уравнения движения в безразмерной форме одинаковы. Очевидно, что уравнения будут одинаковыми, если для обоих потоков I и II равны между собою соответственные множители, содержащие масштабы, т. е. если

$$\left(\frac{L}{VT}\right)_{\mathrm{I}}=\left(\frac{L}{VT}\right)_{\mathrm{II}},\qquad \left(\frac{gL}{V^2}\right)_{\mathrm{I}}=\left(\frac{gL}{V^2}\right)_{\mathrm{II}},$$
$$\left(\frac{p_0}{\rho_0 V^2}\right)_{\mathrm{I}}=\left(\frac{p_0}{\rho_0 V^2}\right)_{\mathrm{II}},\qquad \left(\frac{\nu}{VL}\right)_{\mathrm{I}}=\left(\frac{\nu}{VL}\right)_{\mathrm{II}}.$$

*Эти условия являются, таким образом, необходимыми и достаточными для того, чтобы два потока были динамически подобны.* Нетрудно видеть, что первое из этих условий эквивалентно условию подобия Струхала, второе — условию подобия Фруда, третье — условию подобия Маиевского (ибо, умножая обе части этого равенства на $k=c_p/c_V$, сможем записать его в виде $(a^2/V^2)_{\mathrm{I}}=(a^2/V^2)_{\mathrm{II}}$ и, наконец, четвертое — условию подобия Рейнольдса.

При таком выводе все правила подобия получаются сразу, и, кроме того, обнаруживается, что их можно рассматривать как соотношения между масштабами[1]).

Для исследования турбулентного течения вязкой жидкости уравнения Навье — Стокса неудобны, так как содержат фактические значения скорости и давления, а не осредненные (по времени) величины. Если подставить в уравнения Навье — Стокса (6.46) вместо скорости и давления их выражения через осредненные и пульсационные величины:

$$v_x=\bar{v}_x+v'_x,\qquad v_y=\bar{v}_y+v'_y,\qquad v_z=\bar{v}_z+v'_z,\qquad p=\bar{p}+p',$$

и затем произвести осреднение (т. е. интегрирование по времени и деление на промежуток интегрирования), то в результате получатся следующие

[1]) Иной вывод условия подобия, основанный на теории размерностей, читатель может найти в книге: Седов Л. И., Методы теории размерностей и теории подобия в механике, Гостехиздат, 1957.

уравнения[1]):

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t}+\bar{v}_x\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x}+\bar{v}_y\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y}+\bar{v}_z\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}+$$
$$+\nu\Delta\bar{v}_x+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{v'_x v'_x})+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{v'_x v'_y})+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{v'_x v'_z});$$

$$\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial t}+\bar{v}_x\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x}+\bar{v}_y\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y}+\bar{v}_z\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}+\nu\Delta\bar{v}_y+$$
$$+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{v'_x v'_y})+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{v'_y v'_y})+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{v'_z v'_y});$$

$$\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial t}+\bar{v}_x\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x}+\bar{v}_y\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y}+\bar{v}_z\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}+\nu\Delta\bar{v}_z+$$
$$+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{v'_x v'_z})+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{v'_y v'_z})+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{v'_z v'_z}).$$

Эти уравнения называются *уравнениями Рейнольдса* (1895) для турбулентного движения несжимаемой жидкости.

Из уравнений Рейнольдса видно, что наличие пульсационных скоростей в турбулентном потоке приводит к образованию как бы дополнительных напряжений (дополнительных к тем, которые были бы в ламинарном потоке, если бы распределение скоростей в нем совпадало с распределением осредненных скоростей в турбулентном потоке). Последние три слагаемых в правой части каждого из уравнений Рейнольдса как раз и соответствуют этим дополнительным напряжениям. Если ввести для напряжений, происходящих от пульсационных скоростей, те же обозначения, что и в § 13, но со звездочкой наверху, то сможем написать:

$$\bar{p}^*_{xx}=-\rho\overline{v'_x v'_x},\qquad \bar{p}^*_{yy}=-\rho\overline{v'_y v'_y},\qquad \bar{p}^*_{zz}=-\rho\overline{v'_z v'_z},$$
$$\bar{\tau}^*_{xy}=\bar{\tau}^*_{yx}=-\rho\overline{v'_x v'_y},\qquad \bar{\tau}^*_{yz}=\bar{\tau}^*_{zy}=-\rho\overline{v'_y v'_z},\qquad \bar{\tau}^*_{xz}=\bar{\tau}^*_{zx}=-\rho\overline{v'_x v'_z}.$$

## § 16. Дифференциальное уравнение энергии для вязкой сжимаемой жидкости

Из предыдущего параграфа известно, что дифференциальные уравнения движения для вязкой сжимаемой жидкости представляют собою неполную систему уравнений, т. е. их число меньше, чем количество входящих в них неизвестных. Составим поэтому для элементарного объема, выделенного в жидкой среде, еще одно уравнение, выражающее закон сохранения энергии. Для частного случая, когда объем выделен двумя поперечными сечениями элементарной струйки, а течение предполагалось установившимся, это уравнение уже было выведено в гл. II. Рассмотрим теперь общий случай течения и выделим в соответствии с прямоугольной системой координат объем жидкости в виде элементарного параллелепипеда (рис. 6.27).

Закон сохранения энергии, как уже известно из гл. II, гласит, что изменение полной энергии выделенного объема за малый промежуток времени равно работе приложенных к объему внешних сил за тот же промежуток времени, сложенной с подведенным к объему количеством тепла.

---

[1]) Оператор $\Delta$ означает $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$; черточка над буквой — знак осреднения по времени.