уравнения [1]):

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t}+\bar{v}_x\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x}+\bar{v}_y\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y}+\bar{v}_z\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}+$$
$$+\nu\Delta\bar{v}_x+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{v'_x v'_x})+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{v'_x v'_y})+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{v'_x v'_z});$$
$$\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial t}+\bar{v}_x\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x}+\bar{v}_y\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y}+\bar{v}_z\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}+\nu\Delta\bar{v}_y+$$
$$+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{v'_x v'_y})+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{v'_y v'_y})+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{v'_z v'_y});$$
$$\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial t}+\bar{v}_x\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x}+\bar{v}_y\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y}+\bar{v}_z\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}+\nu\Delta\bar{v}_z+$$
$$+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{v'_x v'_z})+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{v'_y v'_z})+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{v'_z v'_z}).$$

Эти уравнения называются *уравнениями Рейнольдса* (1895) для турбулентного движения несжимаемой жидкости.

Из уравнений Рейнольдса видно, что наличие пульсационных скоростей в турбулентном потоке приводит к образованию как бы дополнительных напряжений (дополнительных к тем, которые были бы в ламинарном потоке, если бы распределение скоростей в нем совпадало с распределением осредненных скоростей в турбулентном потоке). Последние три слагаемых в правой части каждого из уравнений Рейнольдса как раз и соответствуют этим дополнительным напряжениям. Если ввести для напряжений, происходящих от пульсационных скоростей, те же обозначения, что и в § 13, но со звездочкой наверху, то сможем написать:

$$\bar{p}^*_{xx}=-\rho\overline{v'_x v'_x},\qquad \bar{p}^*_{yy}=-\rho\overline{v'_y v'_y},\qquad \bar{p}^*_{zz}=-\rho\overline{v'_z v'_z},$$
$$\bar{\tau}^*_{xy}=\bar{\tau}^*_{yx}=-\rho\overline{v'_x v'_y},\qquad \bar{\tau}^*_{yz}=\bar{\tau}^*_{zy}=-\rho\overline{v'_y v'_z},\qquad \bar{\tau}^*_{xz}=\bar{\tau}^*_{zx}=-\rho\overline{v'_x v'_z}.$$

§ 16. Дифференциальное уравнение энергии для вязкой сжимаемой жидкости

Из предыдущего параграфа известно, что дифференциальные уравнения движения для вязкой сжимаемой жидкости представляют собою неполную систему уравнений, т. е. их число меньше, чем количество входящих в них неизвестных. Составим поэтому для элементарного объема, выделенного в жидкой среде, еще одно уравнение, выражающее закон сохранения энергии. Для частного случая, когда объем выделен двумя поперечными сечениями элементарной струйки, а течение предполагалось установившимся, это уравнение уже было выведено в гл. II. Рассмотрим теперь общий случай течения и выделим в соответствии с прямоугольной системой координат объем жидкости в виде элементарного параллелепипеда (рис. 6.27).

Закон сохранения энергии, как уже известно из гл. II, гласит, что изменение полной энергии выделенного объема за малый промежуток времени равно работе приложенных к объему внешних сил за тот же промежуток времени, сложенной с подведенным к объему количеством тепла.

[1]) Оператор Δ означает $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$; черточка над буквой — знак осреднения по времени.

Полная энергия элементарного объема $dx\,dy\,dz$ состоит из его кинетической энергии, равной $\frac{\rho v^2}{2}\,dx\,dy\,dz$, и внутренней энергии, равной $\rho U\,dx\,dy\,dz$; как известно из термодинамики,

$$dU = c_v dT, \tag{6.49}$$

где c_v есть теплоемкость газа при постоянном объеме. Изменение полной энергии выделенного объема за единицу времени запишется в виде

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho U\right) dx\,dy\,dz\right] = \frac{d}{dt}\left[\rho\left(\frac{v^2}{2} + U\right) dx\,dy\,dz\right] = \rho\,dx\,dy\,dz\,\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} + U\right).$$

Работа внешних объемных сил за единицу времени может быть выражена в виде: $\rho G v \cos(v, G)\,dx\,dy\,dz$, где $\boldsymbol{G}$ есть сила, приходящаяся на единицу массы, или через проекции $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{v}$ на оси координат: $\rho(Xv_x + Yv_y + Zv_z) \times \times\, dx\,dy\,dz$.

Вычислим работу поверхностных сил, приложенных к левой и правой граням параллелепипеда. Работа, выполненная за единицу времени нормальными усилиями, приложенными к этим граням, равна с точностью до малых величин более высокого порядка, чем объем:

$$(p_{xx} + \Delta p_{xx})(v_x + \Delta v_x)\,dy\,dz - p_{xx}v_x\,dy\,dz = \frac{\partial (p_{xx}v_x)}{\partial x}\,dx\,dy\,dz.$$

Так как соответственные касательные усилия, приложенные к левой и правой граням, также направлены в противоположные стороны, то выполненная ими за единицу времени работа может быть выражена аналогично:

$$\frac{\partial(\tau_{xy}v_y)}{\partial x}\,dx\,dy\,dz \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial(\tau_{xz}v_z)}{\partial x}\,dx\,dy\,dz.$$

Работа всех поверхностных сил, приложенных к левой и правой граням, равна

$$\frac{\partial}{\partial x}(p_{xx}v_x + \tau_{xy}v_y + \tau_{xz}v_z)\,dx\,dy\,dz.$$

Аналогично могут быть представлены работы поверхностных сил, приложенных к нижней и верхней граням и к задней и передней граням параллелепипеда; они соответственно равны

$$\frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}v_x + p_{yy}v_y + \tau_{yz}v_z)\,dx\,dy\,dz$$

и

$$\frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}v_x + \tau_{zy}v_y + p_{zz}v_z)\,dx\,dy\,dz.$$

Обозначим приток тепла за единицу времени к выделенному объему, приходящийся на единицу массы, через Q. Тогда количество подведенного тепла за единицу времени будет равно $\rho Q\,dx\,dy\,dz$.

Дифференциальное уравнение энергии для вязкой сжимаемой жидкости после сокращения всех слагаемых на $dx\,dy\,dz$ примет вид

$$\rho\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{v^2}{2} + U\right)\right] = \rho(Xv_x + Yv_y + Zv_z) + \\ + \frac{\partial}{\partial x}(p_{xx}v_x + \tau_{xy}v_y + \tau_{xz}v_z) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}v_x + p_{yy}v_y + \tau_{yz}v_z) + \\ + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}v_x + \tau_{zy}v_y + p_{zz}v_z) + \rho Q.$$

Рассмотрим более подробно последнее слагаемое. Как известно из теплотехники[1]), подвод тепла к объему, выделенному в жидкости или газе, может происходить путем теплопроводности (т. е. в результате соприкосновения данного объема с более нагретым) и лучеиспускания. Мы ограничимся здесь случаем невысокой температуры, при которой не возникает передачи тепла путем лучеиспускания; в этом случае количество подводимого тепла определяется лишь теплопроводностью. По известному из теплотехники закону Фурье количество тепла, которое проходит в единицу времени сквозь поверхность с площадью, равной единице, равно

$$\boldsymbol{q} = -\lambda \operatorname{grad} T,$$

где λ есть коэффициент теплопроводности среды. Таким образом, поток тепла, приходящийся на единицу площади, представляет собою вектор, направленный в сторону быстрейшего убывания температуры T. Количество тепла, подведенное в единицу времени к левой и правой граням выделенного объема, можно выразить разностью $-\left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx\right) dy\, dz + q_x\, dy\, dz = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx\, dy\, dz$. Полное количество тепла, полученное объемом в единицу времени, равно $-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$; следовательно,

$$\rho Q = -\operatorname{div} \boldsymbol{q} = \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T).$$

Если течение ламинарное и для нормальных и касательных напряжений воспользоваться их выражениями по формулам (6.47) и (6.44), то в результате подстановки в уравнение энергии получим:

$$\begin{aligned}\rho \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{v^2}{2} + U\right)\right] = \rho\, (X v_x + Y v_y + Z v_z) - \operatorname{div} (p \boldsymbol{v}) - \\ -\frac{2}{3} \operatorname{div} (\mu \boldsymbol{v} \operatorname{div} \boldsymbol{v}) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial v_x^2}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v_y^2}{\partial y}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial v_z^2}{\partial z}\right) + 2 \frac{\partial}{\partial x} [\mu (v_y \varepsilon_z + v_z \varepsilon_y)] + 2 \frac{\partial}{\partial y} [\mu (v_x \varepsilon_z + v_z \varepsilon_x)] + \\ + 2 \frac{\partial}{\partial z} [\mu (v_x \varepsilon_y + v_y \varepsilon_x)] + \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T),\end{aligned}$$

где ε_x, ε_y, ε_z суть полускорости скашивания в плоскостях, перпендикулярных соответственно к осям x, y, z.

Это уравнение вместе с уравнениями Навье—Стокса, неразрывности движения, зависимостью (6.49) и уравнением, связывающим плотность с давлением и температурой, образуют замкнутую систему уравнений для движения вязкой сжимаемой среды.

§ 17. Вихревое движение вязкой жидкости

Для того чтобы выяснить свойства вихрей в вязкой несжимаемой жидкости, преобразуем уравнения Навье—Стокса так, чтобы в них входили составляющие угловой скорости частицы. С этой целью заметим, что

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial y\, \partial x} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right);$$

[1]) Михеев М. А., Основы теплопередачи, Госэнергоиздат, 1956. Под редакцией В. К. Кошкина, Основы теплопередачи в авиационной и ракетной технике, Оборонгиз, 1960.