Рассмотрим более подробно последнее слагаемое. Как известно из теплотехники[1]), подвод тепла к объему, выделенному в жидкости или газе, может происходить путем теплопроводности (т. е. в результате соприкосновения данного объема с более нагретым) и лучеиспускания. Мы ограничимся здесь случаем невысокой температуры, при которой не возникает передачи тепла путем лучеиспускания; в этом случае количество подводимого тепла определяется лишь теплопроводностью. По известному из теплотехники закону Фурье количество тепла, которое проходит в единицу времени сквозь поверхность с площадью, равной единице, равно

$$\boldsymbol{q} = -\lambda \operatorname{grad} T,$$

где λ есть коэффициент теплопроводности среды. Таким образом, поток тепла, приходящийся на единицу площади, представляет собою вектор, направленный в сторону быстрейшего убывания температуры T. Количество тепла, подведенное в единицу времени к левой и правой граням выделенного объема, можно выразить разностью $-\left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx\right) dy\, dz + q_x\, dy\, dz = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx\, dy\, dz$. Полное количество тепла, полученное объемом в единицу времени, равно $-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$; следовательно,

$$\rho Q = -\operatorname{div} \boldsymbol{q} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T).$$

Если течение ламинарное и для нормальных и касательных напряжений воспользоваться их выражениями по формулам (6.47) и (6.44), то в результате подстановки в уравнение энергии получим:

$$\rho \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{v^2}{2} + U\right)\right] = \rho\,(Xv_x + Yv_y + Zv_z) - \operatorname{div}(p\boldsymbol{v}) -$$
$$- \frac{2}{3} \operatorname{div}(\mu \boldsymbol{v} \operatorname{div} \boldsymbol{v}) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial v_x^2}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v_y^2}{\partial y}\right) +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial v_z^2}{\partial z}\right) + 2\frac{\partial}{\partial x}[\mu(v_y\varepsilon_z + v_z\varepsilon_y)] + 2\frac{\partial}{\partial y}[\mu(v_x\varepsilon_z + v_z\varepsilon_x)] +$$
$$+ 2\frac{\partial}{\partial z}[\mu(v_x\varepsilon_y + v_y\varepsilon_x)] + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T),$$

где ε_x, ε_y, ε_z суть полускорости скашивания в плоскостях, перпендикулярных соответственно к осям x, y, z.

Это уравнение вместе с уравнениями Навье—Стокса, неразрывности движения, зависимостью (6.49) и уравнением, связывающим плотность с давлением и температурой, образуют замкнутую систему уравнений для движения вязкой сжимаемой среды.

§ 17. Вихревое движение вязкой жидкости

Для того чтобы выяснить свойства вихрей в вязкой несжимаемой жидкости, преобразуем уравнения Навье—Стокса так, чтобы в них входили составляющие угловой скорости частицы. С этой целью заметим, что

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial y\, \partial x} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right);$$

[1]) Михеев М. А., Основы теплопередачи, Госэнергоиздат, 1956. Под редакцией В. К. Кошкина, Основы теплопередачи в авиационной и ракетной технике, Оборонгиз, 1960.

но так как по уравнению неразрывности для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial v_y}{\partial y}=-\frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{\partial v_z}{\partial z},$$

то

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial y}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right).$$

Дифференцируя формулу для ω_y, находим, что

$$\frac{\partial \omega_y}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 v_z}{\partial z\,\partial x}\right).$$

Из последних двух равенств следует:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}=-2\left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y}-\frac{\partial \omega_y}{\partial z}\right).$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}=-2\left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z}-\frac{\partial \omega_z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}=-2\left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x}-\frac{\partial \omega_x}{\partial y}\right).$$

Воспользовавшись этими тремя равенствами и предположив, что объемные силы имеют потенциал $\mathcal{U}$, т. е. что

$$X=-\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x},\qquad Y=-\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y},\qquad Z=-\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z},$$

можно представить уравнения Навье—Стокса (6.46) в виде

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dv_x}{dt}&=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{U}+\frac{p}{\rho}\right)-2\nu\left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y}-\frac{\partial \omega_y}{\partial z}\right),\\
\frac{dv_y}{dt}&=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathcal{U}+\frac{p}{\rho}\right)-2\nu\left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z}-\frac{\partial \omega_z}{\partial x}\right),\\
\frac{dv_z}{dt}&=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathcal{U}+\frac{p}{\rho}\right)-2\nu\left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x}-\frac{\partial \omega_x}{\partial y}\right).
\end{aligned}\right\}\tag{6.50}$$

Проекции ускорения частицы также можно выразить через составляющие угловой скорости. В § 3, гл. V было показано, что

$$\frac{dv_x}{dt}=\frac{\partial v_x}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial (v^2)}{\partial x}+2(v_z\omega_y-v_y\omega_z),$$

$$\frac{dv_y}{dt}=\frac{\partial v_y}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial (v^2)}{\partial y}+2(v_x\omega_z-v_z\omega_x),$$

$$\frac{dv_z}{dt}=\frac{\partial v_z}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial (v^2)}{\partial z}+2(v_y\omega_x-v_x\omega_y).$$

Подставляя эти выражения в равенства (6.50), сможем придать уравнениям Навье—Стокса вид, аналогичный уравнениям Ламба—Громеки для идеальной жидкости:

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{U}+\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}\right)&=\frac{\partial v_x}{\partial t}+2\left(v_z\omega_y-v_y\omega_z\right)+2\nu\left(\frac{\partial\omega_z}{\partial y}-\frac{\partial\omega_y}{\partial z}\right),\\
-\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathcal{U}+\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}\right)&=\frac{\partial v_y}{\partial t}+2\left(v_x\omega_z-v_z\omega_x\right)+2\nu\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial z}-\frac{\partial\omega_z}{\partial x}\right),\\
-\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathcal{U}+\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}\right)&=\frac{\partial v_z}{\partial t}+2\left(v_y\omega_x-v_x\omega_y\right)+2\nu\left(\frac{\partial\omega_y}{\partial x}-\frac{\partial\omega_x}{\partial y}\right).
\end{aligned}\right\}\qquad(6.51)$$

С помощью уравнений (6.50) и (6.51) можно исследовать свойства вихрей в вязкой несжимаемой жидкости. Выясним, в частности, изменяется ли с течением времени интенсивность вихрей, находящихся в вязкой жидкости, или она остается постоянной, как это имеет место в идеальной несжимаемой жидкости. Для этого мы вычислим производную по времени от циркуляции скорости по замкнутому контуру. Согласно кинематической теореме Томсона (гл. V, § 7)

$$\frac{d\Gamma}{dt}=\oint\limits_{(L)}\left(\frac{dv_x}{dt}\delta x+\frac{dv_y}{dt}\delta y+\frac{dv_z}{dt}\delta z\right).$$

Вместо проекций ускорения подставим сюда их выражения по уравнению (6.50). Интеграл, взятый по замкнутому контуру от первых слагаемых в выражениях для проекций ускорения, равен нулю, так как эти слагаемые дадут под знаком интеграла полный дифференциал: $\delta\left(\mathcal{U}+\frac{p}{\rho}\right)$. Величина, отличная от нуля, может получиться лишь от вторых слагаемых; следовательно,

$$\frac{d\Gamma}{dt}=-2\nu\oint\limits_{(L)}\left[\left(\frac{\partial\omega_z}{\partial y}-\frac{\partial\omega_y}{\partial z}\right)\delta x+\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial z}-\frac{\partial\omega_z}{\partial x}\right)\delta y+\left(\frac{\partial\omega_y}{\partial x}-\frac{\partial\omega_x}{\partial y}\right)\delta z\right].$$

В частном случае, если движение вязкой жидкости плоское и происходит параллельно плоскости xy, то

$$\frac{d\Gamma}{dt}=-2\nu\oint\limits_{(L)}\left(\frac{\partial\omega_z}{\partial y}\delta x-\frac{\partial\omega_z}{\partial x}\delta y\right).\qquad(6.52)$$

Таким образом, *в вязкой жидкости циркуляция скорости* по любому замкнутому контуру, а следовательно и интенсивность вихрей, *изменяется с течением времени, причем скорость этого изменения пропорциональна кинематическому коэффициенту вязкости жидкости.* Скорость изменения циркуляции зависит, кроме того, от неравномерности распределения в пространстве составляющих ω. Чем более неравномерно распределены составляющие ω (т. е. чем больше величины производных по координатам от составляющих ω), тем больше $d\Gamma/dt$ и, следовательно, тем быстрее происходит изменение циркуляции. Более подробное исследование показывает, что в вязкой жидкости это изменение таково, что угловые скорости вращения частиц *внутри* жидкости с течением времени выравниваются. Наоборот, *вблизи твердой поверхности* (в пограничном слое) угловые скорости вращения частиц, будучи в начальный момент равными нулю, стремятся с течением времени к некоторому неравномерному распределению, характерному для данного тела и условий его обтекания.

Продемонстрируем применение формул этого параграфа на следующих примерах.

Пример 1. Рассмотрим плоское движение вязкой жидкости, параллельное плоскости xy. Предположим, что в каждой плоскости, параллельной xy, вращаются все частицы, находящиеся внутри окружности радиуса r_0. Распределение угловой скорости вращения частиц по радиусу этой окружности пусть будет линейным:

$$\omega_z = \Omega\left(1 - \frac{r}{r_0}\right),$$

где Ω есть угловая скорость частицы, находящейся в центре окружности.

Найдем зависимость Ω от времени, предполагая, что распределение ω_z по радиусу остается линейным во все время движения.

Введем полярные координаты r и θ и обозначим через δs элемент дуги окружности радиуса r. Замечая, что

$$\delta s \cos(\widehat{x, r}) = \delta y, \qquad \delta s \cos(\widehat{y, r}) = -\delta x,$$

можем написать:

$$-\frac{\partial \omega_z}{\partial y}\delta x + \frac{\partial \omega_z}{\partial x}\delta y = \left[\frac{\partial \omega_z}{\partial y}\cos(\widehat{y, r}) + \frac{\partial \omega_z}{\partial x}\cos(\widehat{x, r})\right]\delta s =$$
$$= \left[\frac{\partial \omega_z}{\partial y}\frac{dy}{dr} + \frac{\partial \omega_z}{\partial x}\frac{dx}{dr}\right]\delta s = \frac{d\omega_z}{dr}\delta s.$$

Подставляя это выражение в правую часть формулы (6.52) для $d\Gamma/dt$ и беря в качестве контура L окружность радиуса r_0, получаем, что в данном случае

$$-2\nu \oint\limits_{(L)} \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y}\delta x - \frac{\partial \omega_z}{\partial x}\delta y\right) = 2\nu \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\omega_z}{dr} r_0\, d\theta = -4\pi\nu\Omega.$$

Но по теореме Стокса

$$\Gamma = 2\int\limits_{(S)} \omega_n dS;$$

в данном случае

$$\int\limits_{(S)} \omega_n dS = \int\limits_0^{r_0}\int\limits_0^{2\pi} \Omega\left(1 - \frac{r}{r_0}\right) r\, d\theta\, dr = \int\limits_0^{r_0} \Omega\left(1 - \frac{r}{r_0}\right) 2\pi r\, dr = \frac{\pi}{3}\Omega r_0^2.$$

Предположим, что r_0 есть постоянная величина, тогда

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{2}{3}\pi r_0^2 \frac{d\Omega}{dt}.$$

Сопоставляя это выражение для $d\Gamma/dt$ с выражением, найденным по формуле (6.52), получаем для Ω следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{2}{3}\pi r_0^2 \frac{d\Omega}{dt} = -4\pi\nu\Omega.$$

Разделив переменные и проинтегрировав, получим:

$$\Omega = \Omega_0 e^{-\frac{6\nu}{r_0^2}t},$$

где через Ω_0 обозначена величина Ω в начальный момент времени $t = 0$. Как показывает последняя формула, угловые скорости вращения частиц с течением времени убывают, так как вращение тормозится силами вязкости жидкости. Уменьшение Ω происходит с тем большей быстротой, чем больше ν и чем меньше r_0.

Более детальное исследование показывает, что в действительности r_0 не остается постоянным; оно увеличивается с течением времени, так как завихренная область как бы расплывается, вовлекая в затухающее вращательное движение все новые массы жидкости. Этот процесс проникновения вращательного движения в окружающую среду под действием сил вязкости называется *диффузией вихря* [1]).

Пример 2. Вычислим распределение скоростей в плоском вихре, находящемся в вязкой жидкости. Будем считать, что линии тока суть концентрические окружности, и предположим, для простоты, что движение является установившимся.

Обратимся к уравнениям (6.51); для установившегося плоского движения, параллельного плоскости xy, эти уравнения принимают вид

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{U}+\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}\right)=-2v_y\omega_z+2\nu\frac{\partial\omega_z}{\partial y},$$
$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathcal{U}+\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}\right)=+2v_x\omega_z-2\nu\frac{\partial\omega_z}{\partial x}.$$

Вводя полярные координаты r и θ и принимая во внимание, что вследствие симметрии рассматриваемого движения все величины, которые его характеризуют, зависят только от r, сможем написать:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{U}+\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}\right)=\frac{d}{dr}\left(\mathcal{U}+\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}\right)\cos\theta,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathcal{U}+\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}\right)=\frac{d}{dr}\left(\mathcal{U}+\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}\right)\sin\theta,$$
$$\frac{\partial\omega_z}{\partial x}=\frac{d\omega_z}{dr}\cos\theta,\qquad \frac{\partial\omega_z}{\partial y}=\frac{d\omega_z}{dr}\sin\theta;$$
$$v_x=-v\sin\theta,\qquad v_y=v\cos\theta.$$

Подставляя эти выражения в предыдущие уравнения, получим:

$$-\frac{d}{dr}\left(\mathcal{U}+\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}\right)\cos\theta=-2v\omega_z\cos\theta+2\nu\frac{d\omega_z}{dr}\sin\theta,$$
$$-\frac{d}{dr}\left(\mathcal{U}+\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}\right)\sin\theta=-2v\omega_z\sin\theta-2\nu\frac{d\omega_z}{dr}\cos\theta.$$

Разделим первое уравнение почленно на $\cos\theta$, второе — на $\sin\theta$ и вычтем из первого уравнения второе; тогда будем иметь:

$$2\nu\frac{d\omega_z}{dr}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)=0.$$

Отсюда следует:

$$\frac{d\omega_z}{dr}=0$$

и, значит, $\omega_z=\text{const}=c$.

Но из кинематики жидкости известно (гл. IV, § 8), что в случае, когда скорость направлена по перпендикуляру к радиусу-вектору,

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dr}+\frac{v}{r}\right).$$

Следовательно, для скорости v получается уравнение

$$\frac{dv}{dr}+\frac{v}{r}-2c=0.$$

[1]) См. по этому поводу Некрасов А. И., Диффузия вихря, Труды ЦАГИ, вып. 84, 1931.

Интегрируя, находим:

$$v = cr + \frac{c_1}{r}.$$

На оси вихря скорость должна быть равна нулю; следовательно, для области вблизи оси вихря $c_1 = 0$; величину c для этой области обозначим через c_0; тогда

$$v = c_0 r.$$

Эту область следует рассматривать как ядро вихря. В части жидкости, удаленной от ядра, $\omega_z = c = 0$ (ибо иначе при $r \to \infty$ $v \to \infty$), $c_1 \neq 0$ и, следовательно,

$$v = \frac{c_1}{r},$$

т. е. скорость распределена по такому же закону, как в случае потенциального движения. Разумеется, между внутренней областью, где $\omega_z = c_0 \neq 0$, и внешней, где $\omega_z = c = 0$, имеется переходная область, в которой значение ω_z убывает от c_0 до нуля. Но так как здесь $\omega_z \neq \text{const}$, то не может быть выполнено исходное предположение о том, что линии тока суть концентрические окружности.

Здесь линии тока соединяют внешнюю область с внутренней и частицы жидкости из внешней области постепенно включаются в ядро вихря, размеры которого с течением времени увеличиваются, а интенсивность уменьшается.

Однако анализ этого процесса не может быть проведен при предположении, что движение является установившимся, и поэтому выходит из рамок данного примера.

Пример 3. Результаты предыдущего примера позволяют решить задачу о движении вязкой жидкости между двумя концентрическими вращающимися круговыми цилиндрами. Предполагая движение установившимся, а линии тока — круговыми, получим, как и в предыдущем примере, распределение скоростей в виде

$$v = cr + \frac{c_1}{r}.$$

Постоянные c и c_1 здесь следует определить из граничных условий на поверхности цилиндров. Если угловые скорости вращения цилиндров обозначить через ω_1 и ω_2, а их радиусы — через r_1 и r_2, то граничные условия можно записать в виде: при $r = r_1$ $v = \omega_1 r_1$, при $r = r_2$ $v = \omega_2 r_2$. Определяя из этих условий c и c_1, окончательно находим:

$$v = \frac{\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{(\omega_1 - \omega_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r}.$$

Касательное напряжение на поверхности цилиндра определится теперь по формуле (6.44): $\tau = 2\mu\varepsilon_z = \mu\left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r}\right)$. Например, для цилиндра радиуса r_1 касательное напряжение равно

$$\tau_1 = \mu \frac{2(\omega_2 - \omega_1) r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Сила трения, приходящаяся на единицу длины этого цилиндра, равна $2\pi r_1 \cdot 1\tau_1$, а момент ее относительно оси цилиндра равен

$$M_1 = 2\pi r_1^2 \cdot 1\tau_1 = \frac{4\pi\mu(\omega_2 - \omega_1) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Если в этих формулах положить $\omega_1 = \omega_2$, то будем иметь случай, когда жидкость между цилиндрами вращается, как твердое тело.