ГЛАВА VII

ТЕОРИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ. СОПРОТИВЛЕНИЕ ТРЕНИЯ В ЖИДКОЙ ИЛИ ГАЗООБРАЗНОЙ СРЕДЕ

§ 1. Понятие о пограничном слое. Схема обтекания тела маловязкой средой

Сопротивление удобообтекаемых тел при их движении в жидкостях или газах является в значительной части сопротивлением от трения среды о поверхность тела. Поэтому для практики весьма важно знать законы трения в жидкостях и газах и уметь рассчитывать сопротивление трения.

Проблемой сопротивления трения в жидкостях и газах занимались многие ученые еще до возникновения аэродинамики; среди них Галилей, Дюбуа, Кулон, Ньютон, Стокс, Рэнкин и др. Роль трения в вопросах воздухоплавания впервые была выявлена великим русским ученым Д. И. Менделеевым, который посвятил изучению трения среды о поверхность тела ряд теоретических и экспериментальных работ. В классической монографии «О сопротивлении жидкостей и о воздухоплавании» (1880) Менделеевым был дан критический анализ существовавших до него теорий сопротивления среды и обобщение огромного, но разрозненного и во многом противоречивого опытного материала по сопротивлению трения. В результате Менделеевым была высказана мысль о том, что *сила трения жидкости проявляется не во всей среде, а лишь в слое, прилегающем к поверхности движущегося тела, где скорость течения резко изменяется по нормали к поверхности*. Дальнейшее развитие этой идеи привело к созданию современной теории пограничного слоя, которая является основой для расчета сопротивления трения удобообтекаемых тел.

Математически задача о расчете касательных напряжений на поверхности тела, обтекаемого вязкой средой, и об определении сопротивления трения приводится, как известно из предыдущей главы, к задаче решения дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости (уравнений Навье — Стокса). Решение должно удовлетворять при этом граничным условиям: на бесконечности скорость потока должна совпадать по величине и направлению с заданной скоростью V_∞; на поверхности обтекаемого тела скорость должна равняться нулю. Однако в такой общей постановке задача о движении вязкой жидкости не может быть решена точно при современном состоянии математического анализа. Дело в том, что уравнения движения вязкой жидкости представляют собой нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных и их интегрирование, а главным образом соблюдение указанных выше граничных условий, сопряжено с непреодолимыми математическими трудностями. До настоящего времени точные решения этих уравнений получены лишь для очень немногих частных случаев, а именно: для движения жидкости по круглой цилиндрической трубе за разгонным участком, для движения между параллельными или расходящимися стенками (случай плоского диффузора), для случая вращения в жидкости диска вокруг оси, перпендикулярной к его плоскости и проходящей через его центр, и для некоторых других случаев. В ряде этих случаев решение уравнений движения вязкой жидкости оказывалось возможным лишь потому, что по тем или иным причинам в этих уравнениях отпадали слагаемые, содержащие произведения скоростей на производные от скоростей (так называемые инерционные или конвективные члены), и уравнения становились, таким образом, линейными. Так, например, при решении задачи о течении жидкости в цилиндрической трубе конвективные члены отпадают вследствие самой природы рассматриваемого движения, т. е. вследствие того, что в рассматриваемом движении отсутствует конвективное ускорение.

Для тех случаев, когда по сути задачи в уравнениях должны фигурировать как конвективные слагаемые, так и слагаемые, происходящие от вязкости, найти точное решение уравнений движения вязкой жидкости представляется весьма затруднительным. Поэтому особое значение приобретают различные способы упрощения этих уравнений, которые имеют своей целью сделать их интегрирование практически возможным.

Можно указать два принципиально отличных друг от друга способа упрощения уравнений движения вязкой жидкости. Один из этих способов заключается в том, что конвективные члены в уравнениях движения отбрасываются или приближенно заменяются другими выражениями, линейными относительно компонентов скорости и их частных производных. Слагаемые же в уравнениях движения, происходящие от вязкости, сохраняются при этом способе без изменения. Таким образом, вместо уравнений движения приходится интегрировать другую систему дифференциальных уравнений, линейных относительно компонентов скорости. Ясно, что пренебрегать силами инерции по сравнению с силами вязкости или заменять точное выражение сил инерции приближенным можно лишь в том случае, если число Рейнольдса мало́ по величине. Сравнение результатов вычислений по этому способу с результатами экспериментов подтверждает, что этот способ дает хорошее соответствие теории с действительностью лишь при весьма малых значениях числа Рейнольдса, при которых весь поток, окружающий тело — ламинарен. Это наглядно можно проиллюстрировать на примере с обтеканием шара вязкой жидкостью. Стокс, интегрируя уравнения движения указанным способом (т. е. пренебрегая инерционными членами), получил для сопротивления шара следующую формулу:

$$Q = 6\pi\mu V_\infty r_0,$$

где r_0 есть радиус шара. Если исходить из этой формулы, то коэффициент сопротивления получается в виде

$$c_x = \frac{Q}{\frac{\rho V_\infty^2}{2}\pi r_0^2} = \frac{6\pi\mu V_\infty r_0}{\frac{\rho V_\infty^2}{2}\pi r_0^2} = 24\frac{\nu}{V_\infty d} = \frac{24}{\mathsf{R}},$$

где R есть число Рейнольдса, определенное по диаметру шара d.

Таким образом, по формуле Стокса зависимость коэффициента сопротивления шара от числа Рейнольдса изображается графически

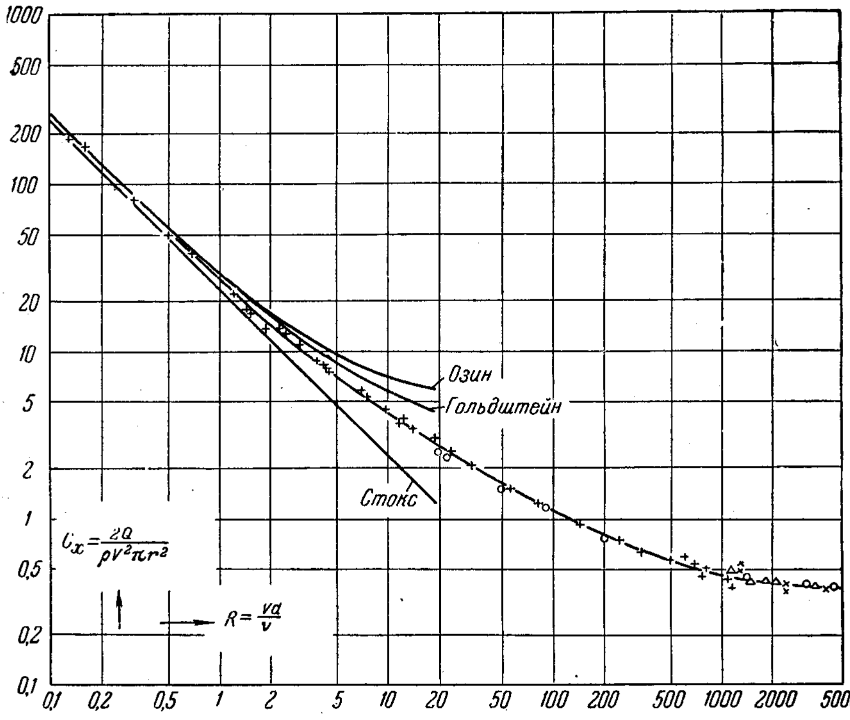

Рис. 7.1. Зависимость коэффициента сопротивления шара от числа Рейнольдса по экспериментальным данным и по теориям Стокса, Озина и Гольдштейна.

(рис. 7.1) ветвью равнобочной гиперболы или в логарифмических масштабах по осям координат — прямой линией. Рис. 7.1, на котором даны как теоретические, так и экспериментальные результаты определения c_x шара, показывает, что уже при весьма малых числах Рейнольдса экспериментальная кривая отходит от прямой линии, изображающей формулу Стокса. Можно считать, как видно из приведенных на этой фигуре графиков, что формула Стокса верна лишь для $\mathrm{R} \leqslant 1$.

После Стокса другие ученые, в том числе шведский ученый Озин, пытались усовершенствовать этод метод; они не отбрасывали конвективных членов, а учитывали их приближенно. Несмотря на сложность и громоздкость математического аппарата, который пришлось при этом применять, результаты их вычислений получились не намного лучше, чем у Стокса. Кривые, полученные по такому способу, также изображены на рис. 7.1, и можно убедиться, что они, так же как и кривая Стокса, отходят от экспериментальной кривой уже при малых значениях числа Рейнольдса.

Насколько малы числа Рейнольдса, для которых еще пригодны теоретические результаты, полученные в случае отбрасывания инерционных членов, можно судить хотя бы по тому факту, что формула Стокса для шара оказывается применимой, например, к движению капелек тумана в воздухе, но уже непригодна для движения в воздухе дождевых капель.

Ясно, что в авиационных вопросах не приходится иметь дело с такими малыми числами Рейнольдса, и поэтому результаты, полученные указанным способом, не имеют здесь практического интереса.

Совершенно иной метод упрощения уравнений движения вязкой жидкости, принципиально отличный от способа Стокса, был разработан Прандтлем[1]). Этот метод основан на представлении о пограничном слое. При упрощении уравнений Навье — Стокса в этом методе исходят из предположения, что жидкость является маловязкой, а скорость ее движения — большой. Иными словами, все исследование проводится для случая больших значений числа Рейнольдса. Этим обусловливается практическое значение теории пограничного слоя в вопросах авиации.

Исходя из уравнений движения вязкой жидкости, можно прийти к понятию о пограничном слое путем следующих рассуждений. Как бы мала ни была вязкость жидкости, нельзя в уравнениях движения вязкой жидкости пренебрегать слагаемыми, происходящими от вязкости. В самом деле, отбрасывая эти слагаемые, мы получаем из уравнений Навье — Стокса уравнение Эйлера для идеальной жидкости, из которого следует, как известно (гл. V), парадоксальный вывод о том, что сопротивление тела при его равномерном движении в несжимаемой среде равно нулю. Поэтому отбрасывание этих слагаемых, которое на первый взгляд кажется вполне естественным упрощением уравнений Навье — Стокса в случае жидкости с малой вязкостью, на самом деле не дает желаемых результатов. Но так как для

---

[1]) Prandtl L., Über Flussigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung, Verhandlung, d. III Internation. Mathem. Kongress in Heidelberg, 1904; Leipzig, 1905.

маловязких жидкостей коэффициент кинематической вязкости все же весьма мал (для воздуха, например, при нормальных условиях он равен $1{,}45 \cdot 10^{-5}$ *м²/сек*), то влияние вязкости следует, очевидно, приписать тому, что множитель при ν в слагаемых, происходящих от вязкости, имеет весьма большую величину. Если ограничиться случаем несжимаемой жидкости, то слагаемые в уравнении Навье — Стокса, происходящие от вязкости, имеют вид: в первом уравнении $\nu\,(\partial^2 v_x/\partial x^2 + \partial^2 v_x/\partial y^2 + \partial^2 v_x/\partial z^2)$, во втором уравнении $\nu\,(\partial^2 v_y/\partial x^2 + \partial^2 v_y/\partial y^2 + \partial^2 v_y/\partial z^2)$, в третьем уравнении $\nu\,(\partial^2 v_z/\partial x^2 + \partial^2 v_z/\partial y^2 + \partial^2 v_z/\partial z^2)$.

Для того чтобы эти слагаемые имели такой же порядок величины, как и остальные слагаемые в уравнениях движения вязкой жидкости, необходимо в случае малых значений ν, чтобы выражения в скобках имели весьма большие значения. А для этого в свою очередь необходимо, чтобы хоть одна из производных от компонент скорости по координатам изменялась весьма быстро при изменении координаты. Но так как не во всех местах потока мы имеем одинаково быстрое изменение компонент скорости и их производных, то отсюда следует, что не во всех местах потока одинаковым образом проявляется действие вязкости. Наиболее сильным действие вязкости будет, очевидно, в местах, где компоненты скорости и их производные изменяются быстро при изменении координат. Наоборот, в тех местах потока, где градиенты скорости и ее производной невелики, влияние вязкости, в силу малости ν, пренебрежимо мало и, следовательно, в этих местах можно рассматривать жидкость как идеальную.

Поэтому *при интегрировании уравнений движения вязкой жидкости* нет надобности распространять их на все пространство, занятое потоком, *достаточно применить их лишь к области быстрого изменения скорости и ее производной.* В этом заключается одно из основных положений теории пограничного слоя. Непосредственное наблюдение показывает, в каких именно областях потока скорость вместе с ее производной изменяется весьма быстро при изменении координат. Мы знаем из предыдущего, что если тело, обтекаемое жидкостью, находится в покое, то на его поверхности скорость равна нулю. Но, как показывают эксперименты, уже на весьма малом расстоянии от поверхности тела скорость имеет величину, близкую к той, которая была бы в случае обтекания тела идеальной жидкостью. Так, например, если поток, имеющий скорость $V = 100$ *м/сек*, обтекает тонкую пластинку вдоль ее плоскости, то в сечении, отстоящем на 1 *м* от входной кромки, скорость на поверхности пластинки равна нулю, а на расстоянии в 15 *мм* от поверхности скорость практически равна 100 *м/сек*. Скорость изменяется в данном случае от 0 до 100 *м/сек* на протяжении слоя толщиной всего в 15 *мм*; при дальнейшем же увеличении расстояния от поверхности пластинки скорость потока практически не изменяется, оставаясь все время равной 100 *м/сек*. Таким образом, тонкий слой жидкости, прилегающий к поверхности обтекаемого тела, представляет собой область больших градиентов скорости; он и называется *пограничным слоем*; иногда его называют также *пристеночным* или *переходным* слоем. В пограничном слое величина силы вязкости имеет, вообще говоря, такой же порядок, как и все остальные силы, учитываемые в уравнениях движения.

Во внешнем потоке, окружающем пограничный слой, скорость изменяется при удалении от поверхности тела чрезвычайно медленно; силы вязкости здесь при малых значениях ν пренебрежимо малы, и следовательно, можно считать, что в этой области движение подчиняется законам течения идеальной жидкости.

Основываясь на этих соображениях, можно при изучении обтекания тел маловязкой жидкостью представить себе пространство, занятое потоком, разграниченным на три области, как показано на рис. 7.2.

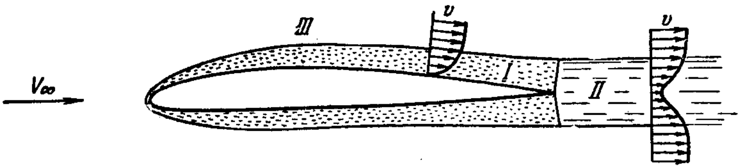

Рис. 7.2. Схема обтекания тела потоком маловязкой жидкости. *I* — пограничный слой; *II* — спутная струя за телом; *III* — область пренебрежимо малых касательных напряжений.

Первую область занимает пограничный слой; с одной стороны он ограничен поверхностью тела, с другой стороны — условной поверхностью, мысленно проводимой в потоке и определяемой тем обстоятельством, что на ней и вне ее можно при заданной точности пренебрегать касательными напряжениями. Внутри пограничного слоя движение характеризуется быстрым изменением скорости по нормали к поверхности тела. Жидкость в пограничном слое существенно вязкая, а режим ее движения может быть как ламинарным, так и турбулентным. В действительности дело обстоит так: в непосредственной близости к поверхности обтекаемого тела благодаря сдерживающему влиянию этой поверхности величины пульсационных скоростей малы и движение можно считать ламинарным (это — так называемый ламинарный «подслой»). По мере удаления от поверхности тела по нормали к ней величины пульсационных скоростей возрастают, и если толщина пограничного слоя достаточно большая (точнее говоря, если число Рейнольдса, в котором характерной длиной служит толщина слоя, достаточно большое), то вне ламинарного «подслоя» движение турбулентно.

Частицы пограничного слоя, пройдя вдоль поверхности тела, уносятся потоком в область, находящуюся за телом. Они сохраняют на себе следы пребывания в пограничном слое. Это выражается в том, что скорости этих частиц, как правило, меньше скоростей в окружающей среде. Типичное распределение скоростей по сечению, взятому в потоке за телом, показано на рис. 7.2. Заторможенные частицы за телом заполняют полосу, которая, теоретически говоря, тянется до бесконечности. Это — вторая область из трех упомянутых выше; она называется, как известно из предыдущего, спутной струей. В этой области могут быть и отдельные вихри, образующиеся в случае неудобообтекаемых тел в результате отрыва пограничного слоя и его свертывания. Жидкость здесь следует рассматривать, вообще говоря, как вязкую ввиду наличия больших градиентов скорости. Движение в этой области при малых числах Рейнольдса ламинарное, при больших — турбулентное.

Все остальное пространство, занятое движущейся средой, т. е. пространство, внешнее по отношению к первой и второй областям движения, составляет третью область. В условиях атмосферы режим движения в этой области всегда турбулентный и, следовательно, движение вихревое. Однако осредненное течение в этой области характеризуется отсутствием быстрых изменений скорости в каком бы то ни было направлении и вследствие этого пренебрежимо малыми величинами касательных напряжений и угловых скоростей вращения частиц. Поэтому с достаточной для практических расчетов степенью приближения можно в этой области считать жидкость идеальной, а движение — происходящим без вращения частиц, т. е. потенциальным. К этой части потока применимы, следовательно, все законы движения идеальной жидкости. Законы течения вязкой жидкости следует применять, таким образом, не во всем потоке, а лишь в узкой области пограничного слоя и в области течения за телом. Этот вывод значительно упрощает дальнейшее решение задачи и является весьма существенным результатом теории пограничного слоя.

Так как, вдобавок, *толщина пограничного слоя* почти на всем протяжении тела *мала по сравнению с размерами тела*, то уравнения движения вязкой жидкости могут быть упрощены для этой области настолько, что становится возможным их интегрирование.

§ 2. Дифференциальные уравнения движения жидкости в пограничном слое

Рассмотрим для простоты плоский, установившийся поток несжимаемой жидкости, движущийся параллельно плоскости xy. Будем предполагать, кроме того, что влияние внешних объемных сил на движение в пограничном слое пренебрежимо мало. Уравнения движения вязкой жидкости тогда можно написать в виде

$$\left.\begin{aligned} v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right),\\ v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right).\end{aligned}\right\}\qquad(7.1)$$