жающей среде. Типичное распределение скоростей по сечению, взятому в потоке за телом, показано на рис. 7.2. Заторможенные частицы за телом заполняют полосу, которая, теоретически говоря, тянется до бесконечности. Это — вторая область из трех упомянутых выше; она называется, как известно из предыдущего, спутной струей. В этой области могут быть и отдельные вихри, образующиеся в случае неудобообтекаемых тел в результате отрыва пограничного слоя и его свертывания. Жидкость здесь следует рассматривать, вообще говоря, как вязкую ввиду наличия больших градиентов скорости. Движение в этой области при малых числах Рейнольдса ламинарное, при больших — турбулентное.

Все остальное пространство, занятое движущейся средой, т. е. пространство, внешнее по отношению к первой и второй областям движения, составляет третью область. В условиях атмосферы режим движения в этой области всегда турбулентный и, следовательно, движение вихревое. Однако осредненное течение в этой области характеризуется отсутствием быстрых изменений скорости в каком бы то ни было направлении и вследствие этого пренебрежимо малыми величинами касательных напряжений и угловых скоростей вращения частиц. Поэтому с достаточной для практических расчетов степенью приближения можно в этой области считать жидкость идеальной, а движение — происходящим без вращения частиц, т. е. потенциальным. К этой части потока применимы, следовательно, все законы движения идеальной жидкости. Законы течения вязкой жидкости следует применять, таким образом, не во всем потоке, а лишь в узкой области пограничного слоя и в области течения за телом. Этот вывод значительно упрощает дальнейшее решение задачи и является весьма существенным результатом теории пограничного слоя.

Так как, вдобавок, *толщина пограничного слоя* почти на всем протяжении тела *мала по сравнению с размерами тела*, то уравнения движения вязкой жидкости могут быть упрощены для этой области настолько, что становится возможным их интегрирование.

§ 2. Дифференциальные уравнения движения жидкости в пограничном слое

Рассмотрим для простоты плоский, установившийся поток несжимаемой жидкости, движущийся параллельно плоскости xy. Будем предполагать, кроме того, что влияние внешних объемных сил на движение в пограничном слое пренебрежимо мало. Уравнения движения вязкой жидкости тогда можно написать в виде

$$\left.\begin{aligned} v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right),\\ v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right).\end{aligned}\right\}\tag{7.1}$$

К этим двум уравнениям динамики следует присоединить уравнение неразрывности движения, которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \tag{7.2}$$

Пусть AB (рис. 7.3) есть отрезок контура обтекаемого тела, а CD — внешняя граница пограничного слоя. Следует ясно представлять себе с самого начала, что эта граница есть лишь условная поверхность, которую мы мысленно проводим в потоке. На самом деле области пограничного слоя и окружающей его жидкости не отделены друг от друга какой-либо границей, а плавно переходят одна

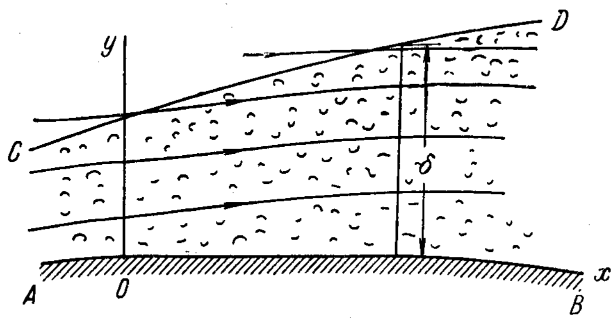

Рис. 7.3. Система координат в случае плоского пограничного слоя.

в другую. Но если задаться определенной степенью точности, то область пренебрежимо малых касательных напряжений можно условно отделить от области пограничного слоя линией CD. Расстояние от контура тела AB до этой линии, измеряемое по нормали к AB, называется *толщиной пограничного слоя* в данной точке контура. Мы будем обозначать эту величину буквой δ. В дальнейшем мы увидим, что толщина пограничного слоя нарастает в направлении потока, так как по мере удаления от места входа струй на поверхность тела затормаживается все большее количество частиц. Отсюда, между прочим, следует, что граница пограничного слоя ни в коем случае не является линией тока; линии тока пересекают ее, входя внутрь пограничного слоя.

В дальнейшем будем предполагать, что толщина пограничного слоя δ мала по сравнению с характерным размером тела L. При этом для простоты дальнейших рассуждений, относящихся к пограничному слою, возьмем систему координат, в которой ось абсцисс искривлена по обтекаемому контуру, а уравнения движения оставим без изменения, т. е. написанными в прямоугольной системе координат. Можно доказать, что если кривизна контура небольшая и, в частности, если на контуре нет угловых точек, то погрешность, происходящая от искривления оси x, пренебрежимо мала. Произвольную точку O на контуре тела возьмем за начало координат, абсциссы x будем отсчитывать по дуге контура от точки O, а ординаты y — по нормали к контуру в каждой данной точке (как показано на рис. 7.3). При таком выборе системы координат ордината y изменяется в пограничном слое на всем протяжении контура в пределах от 0 до δ.

Перейдем теперь к оценке порядка величины отдельных слагаемых в уравнениях (7.1) и (7.2). При этом абсциссы x будем считать величинами того же порядка, что и характерный размер L (например, длина) тела. Ординаты y будем считать величинами того же порядка, что и толщина пограничного слоя δ, ибо они изменяются в пределах от 0 до δ. Составляющую скорости вдоль дуги обтекаемого контура v_x будем считать величиной того же порядка, что и скорость потока на бесконечности V_∞. Остальные величины, фигурирующие в уравнениях (7.1), (7.2), вообще говоря, могут быть выражены через эти величины.

Рассмотрим сначала первое из уравнений (7.1). Производная $\partial v_x/\partial x$ представляет собой величину порядка V/L и, следовательно, величина первого слагаемого в левой части имеет порядок V^2/L.

Для того чтобы судить о величине составляющей скорости по нормали к контуру v_y, обратимся к уравнению неразрывности движения (7.2). Первое слагаемое в его левой части есть величина порядка V/L; следовательно, и величина второго слагаемого должна иметь такой же порядок, ибо иначе сумма этих слагаемых не будет равна нулю; итак, $\partial v_y/\partial y \sim V/L$. Величину v_y теперь можно выразить через $\partial v_y/\partial y$ с помощью соотношения

$$v_y = \int_0^y \frac{\partial v_y}{\partial y}\, dy.$$

По теореме о среднем значении получаем:

$$v_y = \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)_{\text{ср}} \int_0^y dy = \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)_{\text{ср}} y \sim \frac{V}{L}\delta.$$

Так как

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \sim \frac{V}{\delta},$$

то второе слагаемое в левой части первого из уравнений (7.1) есть величина порядка V^2/L:

$$v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \sim \frac{V\delta}{L}\frac{V}{\delta} = \frac{V^2}{L}.$$

Таким образом, в левой части равенства (7.1) оба слагаемых имеют один и тот же порядок величины.

Перейдем теперь к правой части первого уравнения системы (7. 1) и рассмотрим выражение в скобках. Здесь первое слагаемое можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)}{\partial x}.$$

Так как $\partial v_x/\partial x \sim V/L$, то $\partial^2 v_x/\partial x^2 \sim V/L^2$. Аналогично находим порядок величины второго слагаемого

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \sim \frac{V}{\delta^2}.$$

Слагаемые здесь имеют, как видим, разный порядок величины: первое есть величина конечная, а второе — величина большая, порядка $1/\delta^2$. Поэтому первым слагаемым по сравнению со вторым можно пренебречь. Ускорение, происходящее от вязкости, выразится в результате этого одним слагаемым $\nu(\partial^2 v_x/\partial y^2)$, которое пропорционально $\nu V/\delta^2$.

Заметим, что если коэффициент кинематической вязкости для данной жидкости есть величина малая, то ускорение, происходящее от вязкости, должно быть в пограничном слое величиной такого же порядка, как и конвективное ускорение. В самом деле, если бы ускорение, происходящее от вязкости, было мало по сравнению с конвективным, то им можно было бы пренебречь и мы получили бы вместо уравнений движения вязкой жидкости уравнения движения идеальной. Это привело бы, в конце концов, к абсурдному выводу о том, что сопротивление тела при равномерном движении в несжимаемой среде равно нулю (парадокс Даламбера). Если бы, наоборот, конвективное ускорение было мало по сравнению с ускорением, происходящим от вязкости, то, пренебрегая конвективным ускорением, мы получили бы уравнения, из которых исходят при интегрировании по способу Стокса — Озина. Однако результат интегрирования по этому способу соответствует действительности лишь при весьма малых значениях числа Рейнольдса. Мы же рассматриваем в теории пограничного слоя большие значения числа Рейнольдса, и поэтому остается лишь предположить, что конвективное ускорение и ускорение, происходящее от вязкости, суть величины одного и того же порядка.

Что касается слагаемого — $(1/\rho)\cdot(\partial p/\partial x)$, то оно не содержит ни коэффициента кинематической вязкости ν, ни толщины пограничного слоя δ и представляет собой конечную величину.

Итак, в первом из уравнений (7.1) можно пренебречь, как указано выше, лишь одним слагаемым; это уравнение принимает тогда следующий вид:

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}.$$

Из последнего уравнения получается интересный вывод о порядке величины толщины пограничного слоя δ. Конвективное ускорение, как мы видели, пропорционально V^2/L, ускорение, происходящее от вязкости, пропорционально $\nu V/\delta^2$; так как эти ускорения суть величины одного и того же порядка, то можно написать:

$$\frac{V^2}{L} \sim \frac{\nu V}{\delta^2}.$$

Отсюда находим:

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu L}{V}}. \tag{7.3}$$

Иногда вместо толщины пограничного слоя δ рассматривают безразмерную величину δ/L, т. е. отношение толщины слоя к характерному размеру тела. Эта величина называется *относительной толщиной* пограничного слоя; из соотношения (7.3) следует, что относительная толщина

$$\frac{\delta}{L} \sim \sqrt{\frac{\nu}{VL}} = \frac{1}{\sqrt{\mathsf{R}}},$$

где R есть число Рейнольдса.

Таким образом, толщина пограничного слоя будет тем больше, чем больше коэффициент кинематической вязкости жидкости и размеры тела, и тем меньше, чем больше скорость набегающего потока; относительная же толщина пограничного слоя будет тем меньше, чем больше число Рейнольдса. Это последнее обстоятельство нужно всегда иметь в виду при переходе от модели к натуре, если числа Рейнольдса для них различны.

Рассмотрим теперь второе из уравнений системы (7.1). Так как

$v_y \sim \frac{V}{L}\delta$, $v_x \sim V$, $\frac{\partial v_y}{\partial x} \sim \frac{V}{L^2}\delta$, $\frac{\partial v_y}{\partial y} \sim \frac{V}{L}$, то

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} \sim \frac{V^2}{L^2}\delta, \qquad v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \sim \frac{V^2}{L^2}\delta.$$

Таким образом, левая часть этого уравнения представляет собой величину, пропорциональную δ. Обратимся к правой части и рассмотрим выражение в скобках. Нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \sim \frac{V}{L^2}\delta, \qquad \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right) \sim \frac{V}{L}\frac{1}{\delta},$$

и поэтому первым из этих слагаемых можно пренебречь по сравнению со вторым. Ускорение, происходящее от сил вязкости, изобразится, следовательно, выражением $\nu(\partial^2 v_y)/\partial y^2$. Для того чтобы оценить порядок величины этого выражения, заметим, что, как вытекает из соотношения (7.3),

$$\nu \sim \frac{V}{L}\delta^2;$$

поэтому ускорение от сил вязкости

$$\nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \sim \frac{V^2}{L^2} \delta,$$

т. е. представляет собой величину такого же порядка, как и выражение в левой части уравнения.

Рассматриваемое уравнение в результате этих рассуждений позволяет сделать весьма интересный вывод о порядке величины $\partial p/\partial y$. Так как ускорения от сил инерции и от сил вязкости пропорциональны $\frac{V^2}{L^2}\delta$, то из уравнения следует, что и

$$\frac{\partial p}{\partial y} \sim \frac{V^2}{L^2} \delta.$$

Если провести в какой-либо точке контура обтекаемого тела нормаль к его поверхности и взять на ней две точки — одну на поверхности тела, другую — на расстоянии y от поверхности, то на основании последнего соотношения получаем, что разность давлений в этих точках $p_2 - p_1$ равна

$$p_2 - p_1 = \int_0^y \frac{\partial p}{\partial y} dy = \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{\text{ср}} \int_0^y dy = \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{\text{ср}} y \sim \frac{V^2}{L^2} \delta^2.$$

Таким образом, *изменение давления по нормали к контуру тела в пределах пограничного слоя представляет собой величину малую, порядка* $(\delta/L)^2$. В большинстве практически важных случаев этой величиной вследствие малости δ по сравнению с L можно пренебречь и, следовательно, считать, что

$$p_2 - p_1 = 0,$$

или, иными словами, что *в пограничном слое p от y не зависит*. Это — один из наиболее замечательных результатов теории пограничного слоя. Именно это свойство пограничного слоя позволяет объяснить причину достаточно точного совпадения результатов эксперимента по измерению распределения давления с вычислениями, основанными на теории потенциального обтекания. Дело в том, что, вычисляя поле скоростей потенциального потока, можно получить лишь распределение давлений *вне* пограничного слоя, ибо внутри слоя движение заведомо непотенциальное. Измеряя распределение давлений (с помощью дренированной модели), мы получаем давления на самой поверхности тела. Известно, что для удобообтекаемых тел получается почти на всем протяжении тела прекрасное совпадение распределения давления, вычисленного теоретически (например, методом наложения потоков или методом конформного преобразования), с распределением давления, найденным экспериментально. Объяснить этот факт можно лишь в том случае, если принять во внимание, что в пограничном слое давление не изменяется по нормали к поверхности тела.

Второе из уравнений системы (7.1) может быть, таким образом, проинтегрировано для пограничного слоя в общем виде. Равенство $p = \text{const}$ во всех точках одной и той же нормали к поверхности тела можно рассматривать как общий интеграл этого уравнения, определяющий одно из неизвестных, именно давление p. Правда, он определяет давление не полностью: давление как функция x этим интегралом не определяется. Оно должно быть найдено расчетом внешнего потока идеальной среды.

Из двух уравнений системы (7.1) остается теперь лишь одно первое, в котором, кроме упрощений, которые были сделаны выше, можно еще заменить $\partial p/\partial x$ на dp/dx, так как в пограничном слое p от y не зависит. К этому уравнению следует присоединить уравнение неразрывности (7.2). Таким образом, получается система двух дифференциальных уравнений для двух неизвестных v_x и v_y:

$$\left.\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.4}$$

Они называются уравнениями Прандтля для пограничного слоя (для случая плоского, установившегося движения несжимаемой жидкости).

Следует отметить, что так как эти уравнения выведены из уравнений Навье—Стокса, в которые не входят в явном виде составляющие пульсационной скорости, то уравнения в форме (7.4) пригодны лишь для ламинарного движения в пограничном слое. Для турбулентного движения несжимаемой жидкости уравнения, аналогичные уравнениям Прандтля, могут быть выведены из уравнений (7.4) путем замены актуальных величин соответствующими суммами величин осредненных и пульсационных и последующего осреднения этих уравнений. В результате для турбулентного пограничного слоя, точнее говоря для части его, внешней по отношению к ламинарному «подслою», получаются в случае плоского, установившегося движения следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{d\bar{p}}{dx} + \nu \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(-\rho\, \overline{v'_x v'_y}\right), \\ \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.5}$$

Можно объединить первые уравнения в системах (7.4) и (7.5) в одной, наиболее общей форме, пригодной как для ламинарного, так и для турбулентного движения в пограничном слое. Если обозначить через τ касательное напряжение в слое, то дифференциальное сравнение движения примет вид

$$\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial y};$$

здесь в случае ламинарного движения $\tau = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}$, а в случае турбулентного — $\bar{\tau} = \mu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \rho\left(-\overline{v_x' v_y'}\right)$.

Уравнения (7.4) и (7.5) значительно проще для интегрирования, нежели исходные уравнения Навье—Стокса, и вместе с тем они с достаточной точностью соответствуют действительности. Так, например, уравнения Прандтля для ламинарного пограничного слоя были проинтегрированы в ряде случаев (в том числе для плоской пластинки, кругового цилиндра и других тел), и результаты теории во всех этих случаях весьма точно совпадают с данными эксперимента [1]).

§ 3. Применение теоремы импульсов к пограничному слою. Интегральное соотношение Кармана для плоского движения в слое

Вопрос об определении движения жидкости в пограничном слое приводится, как мы видели в предыдущем параграфе, к решению системы дифференциальных уравнений в частных производных. В результате решения этой системы мы находим поле скоростей и лишь после этого можем вычислять касательные напряжения, толщину пограничного слоя и другие величины, связанные с движением в слое. Однако при решении многих практических задач, относящихся главным образом к вопросу о сопротивлении трению удобообтекаемых тел, нет надобности в предварительном определении поля скоростей пограничного слоя. В этих случаях весьма удобен иной способ, развитый Карманом [2]). Этот способ можно охарактеризовать как способ конечных объемов; в противоположность способу Прандтля, он исходит не из дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости, а из теоремы импульсов, примененной к конечной области пограничного слоя. Не давая точного ответа на вопрос о распределении скоростей в пограничном слое, способ Кармана позволяет, однако, весьма быстро, минуя громоздкое и довольно сложное интегрирование дифференциальных уравнений в частных производных, определить толщину пограничного слоя и распределение сил трения по поверх-

---

[1]) Читатель может более подробно ознакомиться с теорией ламинарного пограничного слоя по книгам: Лойцянский Л. Г., Ламинарный пограничный слой, Физматгиз, 1962; Meksyn D., New methods in laminar boundary layer theory, Pergamon Press, 1961.

[2]) Kármán T., Über laminare und turbulente Reibung, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, т. 1, 1921.