сравнение движения примет вид

$$\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial y};$$

здесь в случае ламинарного движения $\tau = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}$, а в случае турбулентного — $\bar{\tau} = \mu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \rho\left(-\overline{v'_x v'_y}\right)$.

Уравнения (7.4) и (7.5) значительно проще для интегрирования, нежели исходные уравнения Навье—Стокса, и вместе с тем они с достаточной точностью соответствуют действительности. Так, например, уравнения Прандтля для ламинарного пограничного слоя были проинтегрированы в ряде случаев (в том числе для плоской пластинки, кругового цилиндра и других тел), и результаты теории во всех этих случаях весьма точно совпадают с данными эксперимента[1]).

§ 3. Применение теоремы импульсов к пограничному слою. Интегральное соотношение Кармана для плоского движения в слое

Вопрос об определении движения жидкости в пограничном слое приводится, как мы видели в предыдущем параграфе, к решению системы дифференциальных уравнений в частных производных. В результате решения этой системы мы находим поле скоростей и лишь после этого можем вычислять касательные напряжения, толщину пограничного слоя и другие величины, связанные с движением в слое. Однако при решении многих практических задач, относящихся главным образом к вопросу о сопротивлении трению удобообтекаемых тел, нет надобности в предварительном определении поля скоростей пограничного слоя. В этих случаях весьма удобен иной способ, развитый Карманом[2]). Этот способ можно охарактеризовать как способ конечных объемов; в противоположность способу Прандтля, он исходит не из дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости, а из теоремы импульсов, примененной к конечной области пограничного слоя. Не давая точного ответа на вопрос о распределении скоростей в пограничном слое, способ Кармана позволяет, однако, весьма быстро, минуя громоздкое и довольно сложное интегрирование дифференциальных уравнений в частных производных, определить толщину пограничного слоя и распределение сил трения по поверх-

---

[1]) Читатель может более подробно ознакомиться с теорией ламинарного пограничного слоя по книгам: Лойцянский Л. Г., Ламинарный пограничный слой, Физматгиз, 1962; Meksyn D., New methods in laminar boundary layer theory, Pergamon Press, 1961.

[2]) Kármán T., Über laminare und turbulente Reibung, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, т. 1, 1921.

ности тела. Для практики это весьма важно, и поэтому способ Кармана получил широкое распространение.

Рассмотрим тот же случай, что и в предыдущем параграфе, т. е. плоское, установившееся движение жидкости в пограничном слое. Жидкость при этом может быть как сжимаема, так и несжимаема. Возьмем на контуре обтекаемого тела две точки на расстоянии Δx друг от друга (рис. 7.4) и проведем через эти точки нормали к контуру, продолжив их до пересечения с внешней границей пограничного слоя.

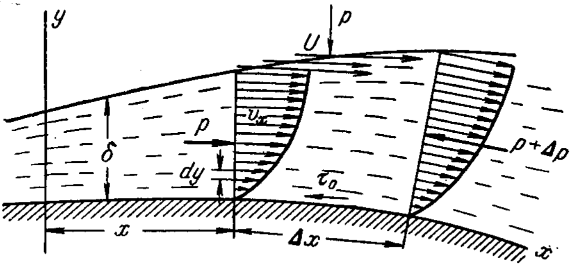

Рис. 7.4. К выводу уравнения импульсов для плоского пограничного слоя.

Полученные таким образом отрезки двух нормалей к контуру и границы слоя, внутренняя и внешняя, выделяют на плоскости xy элементарную площадку. Представим себе на плоскости xy слой жидкости толщиной в единицу длины и выделим в пограничном слое объем, имеющий основанием упомянутую площадку и высоту, равную единице. Применим к этому объему теорему об изменении количества движения, т. е. запишем, что изменение количества движения dJ равно импульсу приложенных сил:

$$dJ = F\,dt,$$

где F есть результирующая приложенных к объему сил, а dt — промежуток времени. В гл. V было доказано, что изменение количества движения жидкого объема за какой-либо промежуток времени в случае установившегося потока равно количеству движения, протекающему за то же время сквозь поверхность, ограничивающую жидкий объем. Можно, следовательно, представить себе, что выделенный объем неподвижен, а жидкость втекает в него через левую и верхнюю грани и вытекает через правую, неся с собой определенное количество движения.

Для дальнейшего нам необходимы количества движения, протекающие сквозь элемент, и силы, действующие на него, лишь в проекции на ось x. Обозначим проекцию на ось x количества движения, протекающего за единицу времени сквозь левую грань элемента, через J_1, проекцию на ось x количества движения, протекающего за то же время сквозь правую грань, — через J_2 и проекцию на ось x количества движения, протекающего за то же время сквозь верхнюю грань, — через J_3; тогда в соответствии с условием о том, что положительным направлением нормали к поверхности выделенного объема считается направление внешней нормали, получаем:

$$\frac{dJ_x}{dt} = -J_1 + J_2 - J_3.$$

Вычислим отдельно каждое из этих слагаемых. Так как внутри пограничного слоя скорость v_x изменяется по нормали к контуру тела весьма быстро, то для вычисления J_1 придется поступить следующим образом. Возьмем элемент нормали длиной dy; через полоску с основанием dy и высотой, равной единице, протекает в единицу времени масса жидкости, равная $\rho v_x dy$; эта масса несет количество движения, проекция которого на ось x равна $\rho v_x^2 dy$. Интегрируя это выражение вдоль отрезка нормали от $y=0$ до $y=\delta$, получим:

$$J_1 = \int_0^\delta \rho v_x^2 \, dy.$$

Для того чтобы вычислить $J_2 - J_1$, заметим, что количество движения, протекающее в единицу времени вдоль оси x через поперечное сечение в пограничном слое, есть функция x. Обозначив это количество движения через J, можем написать:

$$J = f(x).$$

Так как J_1 соответствует значению x, равному x_1, а J_2 — значению x, равному $x_2 = x_1 + \Delta x$, то можно рассматривать J_2 как наращенное значение J_1:

$$J_2 = J_1 + \Delta J_1.$$

Отсюда находим:

$$J_2 - J_1 = \Delta J_1 = \Delta \left(\int_0^\delta \rho v_x^2 \, dy \right).$$

Перейдем теперь к вычислению J_3. Обозначим скорость потока на внешней границе слоя через U; эту величину можно приближенно считать неизменной в пределах малого промежутка Δx. Количество движения, протекающее в единицу времени через верхнюю грань, запишется в виде произведения скорости U на массу жидкости M_3, протекающую через эту грань в единицу времени,

$$J_3 = UM_3.$$

Остается здесь вычислить M_3. Обозначив массы жидкости, протекающие в единицу времени через левую и правую грани, соответственно через M_1 и M_2, получаем вследствие неразрывности движения

$$-M_1 + M_2 - M_3 = 0.$$

Масса жидкости, протекающая в единицу времени через левую грань, равна

$$M_1 = \int_0^\delta \rho v_x dy.$$

Так как масса жидкости, протекающая через поперечное сечение в пограничном слое, есть функция x, то M_2 можно рассматривать как наращенное значение M_1, соответствующее приращению Δx независимого переменного, и, следовательно,

$$M_2 = M_1 + \Delta M_1.$$

Для искомой массы M_3 теперь получаем следующее выражение:

$$M_3 = M_2 - M_1 = \Delta M_1 = \Delta\left(\int_0^\delta \rho v_x dy\right),$$

а для количества движения J_3:

$$J_3 = U\Delta\left(\int_0^\delta \rho v_x dy\right).$$

Полное изменение количества движения рассматриваемого элемента за единицу времени в проекции на ось x равно

$$\frac{dJ_x}{dt} = \Delta\left(\int_0^\delta \rho v_x^2 dy\right) - U\Delta\left(\int_0^\delta \rho v_x dy\right).$$

Рассмотрим силы, действующие на выделенный элемент; при этом внешними объемными силами будем пренебрегать. Для того чтобы определить проекцию действующих сил на ось x, нужно учесть силы давления, приложенные к левой, верхней и правой граням элемента, и силы трения, приложенные к нижней его грани (силы трения, приложенные к левой и правой граням, дают проекцию на ось x, равную нулю, а на верхней грани они отсутствуют по самому определению внешней границы пограничного слоя).

Так как по доказанному в предыдущем параграфе давление в пограничном слое остается постоянным во всех точках нормали к контуру тела, то проекция на ось x сил давления, приложенных к левой грани, равна $p\delta$. Полагая давление на верхней грани равным p, получим, что проекция на ось x сил давления, приложенных к этой грани, равна $p\Delta\delta$, где $\Delta\delta$ — приращение толщины пограничного слоя при переходе от левой грани к правой. Проекция на ось x сил давления, приложенных к правой грани, равна $(p + \Delta p)(\delta + \Delta\delta)$. Сила трения, приложенная к нижней грани элемента, имеет проекцию на ось x, равную $-\tau_0 \Delta x$. Суммируя все эти проекции, получим:

$$F_x = p\delta + p\,\Delta\delta - (p + \Delta p)(\delta + \Delta\delta) - \tau_0\,\Delta x = -\delta\,\Delta p - \Delta p\,\Delta\delta - \tau_0\,\Delta x.$$

Равенство

$$\frac{dJ_x}{dt} = F_x$$

теперь запишется в виде

$$\Delta\left(\int_0^\delta \rho v_x^2 dy\right) - U\Delta\left(\int_0^\delta \rho v_x dy\right) = -\delta\,\Delta p - \Delta p\,\Delta\delta - \tau_0\,\Delta x.$$

Деля обе части равенства на Δx и переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим:

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho v_x^2 dy - U\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho v_x dy = -\frac{dp}{dx}\delta - \tau_0. \qquad (7.6)$$

Последнее равенство называется уравнением импульсов (или интегральным соотношением Кармана) для плоского установившегося течения в пограничном слое [1]).

Следует сразу же отметить, что, в противоположность дифференциальным уравнениям Прандтля (7.1), это равенство в такой же форме, как оно здесь написано, пригодно как для ламинарного, так и для турбулентного движения в слое. В самом деле, при выводе этого равенства мы не делали никаких предположений о природе касательного напряжения τ_0; поэтому в это равенство можно подставлять вместо τ_0 его выражение для любого режима движения. Равенство (7.6) пригодно и для любой жидкости, сжимаемой и несжимаемой. Таким образом, интегральное соотношение Кармана является более общим, нежели дифференциальные уравнения Прандтля.

В уравнении импульсов известными величинами следует считать U и dp/dx, а в случае несжимаемой жидкости и плотность ρ. Первая из этих величин U представляет собой скорость в потенциальном потоке, внешнем к пограничному слою, и может быть определена как теоретически (в результате решения уравнения для потенциала скоростей), так и по экспериментальным данным (если измерено распределение давлений по поверхности тела). Величина dp/dx также может быть найдена теоретически, если известно U. В самом деле,

---

[1]) Если движение в пограничном слое неустановившееся, то при выводе уравнения импульсов следует учесть наряду с изменением количества движения, происходящим от протекания жидкости через границы выделенного объема, также изменение количества движения, происходящее оттого, что в каждой внутренней точке этого объема скорость изменяется с течением времени. Это же обстоятельство необходимо принять во внимание при использовании уравнения неразрывности движения. В результате получается следующее уравнение импульсов для плоского, неустановившегося движения жидкости в пограничном слое:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\delta \rho v_x dy - U\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\delta \rho dy + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho v_x^2 dy - U\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho v_x dy = -\delta\frac{\partial p}{\partial x} - \tau_0;$$

если v_x, p и ρ не зависят от времени t, то из этого уравнения получается как частный случай уравнение (7.6).

dp/dx имеет внутри пограничного слоя ту же величину, что и на внешней границе слоя, где поток потенциальный. Но в области потенциального движения идеальной жидкости, пренебрегая действием внешних объемных сил, будем иметь на основании уравнений § 4 гл. V

$$dp = -\rho v\, dv,$$

и, следовательно, на внешней границе пограничного слоя выполняется следующее равенство:

$$\frac{dp}{dx} = -\rho U \frac{dU}{dx}. \qquad (7.7)$$

Величина dp/dx может быть найдена также и по экспериментальным данным (если измерено распределение давления). Таким образом, U и dp/dx могут быть определены способами, не связанными с пограничным слоем, и их можно считать известными. Неизвестными величинами в уравнении импульсов являются v_x, δ и τ_0, а в случае сжимаемой жидкости и плотность ρ. Отсюда видно, что с помощью одного только интегрального соотношения нельзя решить все вопросы, относящиеся к пограничному слою. Необходимы еще дополнительные уравнения, связывающие те же неизвестные величины. Иными словами, прежде чем пользоваться уравнением импульсов (7.6), необходимо знать распределение скоростей в пограничном слое и зависимость касательного напряжения от толщины слоя, плотности и скорости на внешней границе слоя.

На первый взгляд может показаться, что вследствие этого применение интегрального соотношения Кармана сложнее, нежели решение уравнений Прандтля. Однако в действительности это не так. Дело в том, что в уравнение импульсов величина скорости внутри слоя входит только под знаком интеграла. Из математики известно, что если функция задана приближенно, то при интегрировании величина погрешности уменьшается. Можно поэтому без большой погрешности в результатах пользоваться для уравнения импульсов приближенными законами распределения скоростей. Иными словами, достаточно знать, хотя бы в общих чертах, распределение скоростей в слое для того, чтобы можно было с успехом применять уравнение импульсов. В этом заключается основная ценность метода Кармана.

§ 4. Понятия о толщине вытеснения и толщине потери импульса в пограничном слое. Уравнение импульсов в условных толщинах

Уравнение импульсов для несжимаемой жидкости применяют не только в виде уравнения (7.6), но также и в несколько иной форме, указанной Прандтлем. Эта форма может быть получена из уравнения (7. 6) путем тождественных преобразований. Так как

$$\frac{d}{dx}\left(U\int_0^\delta v_x dy\right) = \frac{dU}{dx}\int_0^\delta v_x dy + U\frac{d}{dx}\int_0^\delta v_x dy,$$