dp/dx имеет внутри пограничного слоя ту же величину, что и на внешней границе слоя, где поток потенциальный. Но в области потенциального движения идеальной жидкости, пренебрегая действием внешних объемных сил, будем иметь на основании уравнений § 4 гл. V

$$dp = -\rho v\,dv,$$

и, следовательно, на внешней границе пограничного слоя выполняется следующее равенство:

$$\frac{dp}{dx} = -\rho U \frac{dU}{dx}. \tag{7.7}$$

Величина dp/dx может быть найдена также и по экспериментальным данным (если измерено распределение давления). Таким образом, U и dp/dx могут быть определены способами, не связанными с пограничным слоем, и их можно считать известными. Неизвестными величинами в уравнении импульсов являются v_x, δ и τ_0, а в случае сжимаемой жидкости и плотность ρ. Отсюда видно, что с помощью одного только интегрального соотношения нельзя решить все вопросы, относящиеся к пограничному слою. Необходимы еще дополнительные уравнения, связывающие те же неизвестные величины. Иными словами, прежде чем пользоваться уравнением импульсов (7.6), необходимо знать распределение скоростей в пограничном слое и зависимость касательного напряжения от толщины слоя, плотности и скорости на внешней границе слоя.

На первый взгляд может показаться, что вследствие этого применение интегрального соотношения Кармана сложнее, нежели решение уравнений Прандтля. Однако в действительности это не так. Дело в том, что в уравнение импульсов величина скорости внутри слоя входит только под знаком интеграла. Из математики известно, что если функция задана приближенно, то при интегрировании величина погрешности уменьшается. Можно поэтому без большой погрешности в результатах пользоваться для уравнения импульсов приближенными законами распределения скоростей. Иными словами, достаточно знать, хотя бы в общих чертах, распределение скоростей в слое для того, чтобы можно было с успехом применять уравнение импульсов. В этом заключается основная ценность метода Кармана.

§ 4. Понятия о толщине вытеснения и толщине потери импульса в пограничном слое. Уравнение импульсов в условных толщинах

Уравнение импульсов для несжимаемой жидкости применяют не только в виде уравнения (7.6), но также и в несколько иной форме, указанной Прандтлем. Эта форма может быть получена из уравнения (7. 6) путем тождественных преобразований. Так как

$$\frac{d}{dx}\left(U\int_0^\delta v_x dy\right) = \frac{dU}{dx}\int_0^\delta v_x dy + U\frac{d}{dx}\int_0^\delta v_x dy,$$

то уравнение (7.6) в случае несжимаемой жидкости может быть представлено в виде

$$\rho \frac{d}{dx}\int_0^\delta v_x^2 dy - \rho \frac{d}{dx}\left(U\int_0^\delta v_x dy\right) + \rho U' \int_0^\delta v_x dy - \rho\, UU'\,\delta = -\tau_0;$$

здесь вместо dp/dx подставлено его выражение по формуле (7.7) (штрих означает дифференцирование по x).

Объединяя в последнем уравнении слагаемые, содержащие производные от интегралов, получим:

$$\rho \frac{d}{dx}\int_0^\delta (Uv_x - v_x^2)\, dy + \rho U' \int_0^\delta (U - v_x)\, dy = \tau_0. \tag{7.8}$$

Интеграл, входящий здесь во второе слагаемое, представляет собой, очевидно, разность между расходом жидкости сквозь сечение в пограничном слое в том случае, если бы скорость во всех точках сечения была равна скорости U, и действительным расходом сквозь то же сечение. Иными словами, этот интеграл представляет собой *уменьшение расхода* сквозь сечение в пограничном слое, *происходящее от вязкости жидкости*. Графически этот интеграл изображается заштрихованной площадью на рис. 7.5. Если разделить этот интеграл на величину скорости U, то мы получим толщину некоторого слоя (обозначим ее через δ_*), сквозь сечение которого протекало бы в единицу времени при постоянной во всех точках скорости U количество жидкости, равное указанному уменьшению расхода,

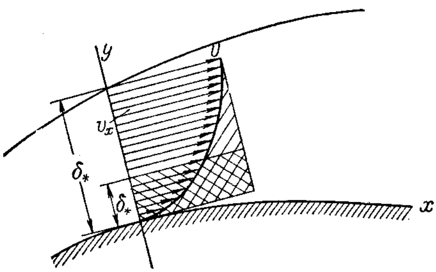

Рис. 7.5. Геометрическое определение «толщины вытеснения».

$$\delta_* = \frac{\int_0^\delta (U - v_x)\, dy}{U} = \int_0^\delta \left(1 - \frac{v_x}{U}\right) dy.$$

Можно также доказать, что δ_* представляет собой среднее смещение линий тока в направлении, перпендикулярном к поверхности тела, происходящее от торможения частиц вблизи нее. По этой причине величину δ_* называют «*толщиной вытеснения*».

Аналогично интеграл, входящий в первое слагаемое в левой части равенства (7.8), можно рассматривать как некоторое уменьшение количества движения, протекающего сквозь сечение пограничного слоя, или, иными словами, как *потерю импульса*. Разделив этот интеграл на U^2, мы получим линейную величину, которая называется *толщиной потери импульса* и обозначается через ϑ

$$\vartheta = \frac{\int\limits_0^\delta \left(v_x U - v_x^2\right) dy}{U^2} = \int\limits_0^\delta \frac{v_x}{U}\left(1 - \frac{v_x}{U}\right) dy.$$

Если эти условные «толщины» δ_* и ϑ, которые оказываются весьма удобными при решении ряда вопросов теории пограничного слоя, ввести в уравнение (7.8), то оно примет вид

$$\rho \frac{d}{dx}(U^2\vartheta) + \rho U U'\delta_* = \tau_0.$$

Выполняя дифференцирование, указанное в первом слагаемом левой части, получим:

$$\rho U^2 \frac{d\vartheta}{dx} + 2\rho U U'\vartheta + \rho U U'\delta_* = \tau_0.$$

Для приведения этого уравнения к безразмерному виду разделим его почленно на ρU^2:

$$\frac{d\vartheta}{dx} + \frac{U'\vartheta}{U}\left(2 + \frac{\delta_*}{\vartheta}\right) = \frac{\tau_0}{\rho U^2}. \qquad (7.9)$$

Последнее равенство представляет собой уравнение импульсов в форме, предложенной Прандтлем. Здесь неизвестными величинами являются δ_*, ϑ и τ_0.

Вместо этих неизвестных удобно ввести другие, безразмерные неизвестные и заодно перейти к новой независимой переменной. В результате получается наиболее простая и универсальная форма уравнения импульсов. Обозначим:

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = \psi, \qquad \frac{\delta_*}{\vartheta} = H$$

(коэффициент ψ не следует смешивать с коэффициентом трения $\bar{\tau}$, которым мы пользовались в предыдущих главах; $\bar{\tau} = \frac{\tau}{\rho V^2/2}$ и, следовательно, не равен ψ). В качестве искомой функции введем число Рейнольдса, в котором характерной длиной является толщина потери импульса ϑ, а характерной скоростью — скорость на внешней границе слоя U:

$$\mathsf{R}_\vartheta = \frac{U\vartheta}{\nu}.$$

За независимую переменную возьмем вместо x величину

$$\chi = \ln\frac{U}{V},$$

где V есть скорость потока на бесконечности.

Вычислим производную $d\mathrm{R}_\vartheta/d\chi$

$$\frac{d\mathrm{R}_\vartheta}{d\chi}=\frac{d\mathrm{R}_\vartheta}{dx}\frac{dx}{d\chi}=\frac{d\mathrm{R}_\vartheta}{dx}\frac{U}{U'}=\left(\frac{U}{\nu}\frac{d\vartheta}{dx}+\frac{U'\vartheta}{\nu}\right)\frac{U}{U'}=\frac{U^2}{U'\nu}\frac{d\vartheta}{dx}+\mathrm{R}_\vartheta,$$

где через U' обозначена производная от U по x.

Из последнего равенства находим:

$$\frac{d\vartheta}{dx}=\frac{U'\nu}{U^2}\left(\frac{d\mathrm{R}_\vartheta}{d\chi}-\mathrm{R}_\vartheta\right).$$

Подставляя эти выражения в равенство (7.9) и вводя обозначение для безразмерного параметра $U'\nu/U^2$,

$$\frac{U'\nu}{U^2}=K,$$

получим окончательно:

$$\frac{d\mathrm{R}_\vartheta}{d\chi}=\frac{\psi}{K}-\mathrm{R}_\vartheta(1+H). \tag{7.10}$$

В этой форме уравнения импульсов все величины безразмерные; из них искомыми являются R_ϑ, ψ, H; остальные же, т. е. независимая переменная χ и параметр K, — известные.

Удобство уравнения (7.10) для приближенного расчета пограничного слоя заключается в том, что, во-первых, отношение двух характерных толщин H в несжимаемой среде мало изменяется вдоль контура удобообтекаемого профиля. Во-вторых, зависимость коэффициента ψ от числа Рейнольдса R_ϑ можно приближенно задать, исходя из известных зависимостей между этими величинами, например, для течения жидкостей по трубам.

Уравнение (7.10) будет представлять собой тогда обыкновенное дифференциальное уравнение с одной неизвестной функцией, R_ϑ или ψ. Таким образом, с математической точки зрения решение задач теории пограничного слоя с помощью интегрального соотношения Кармана значительно проще, чем с помощью дифференциальных уравнений Прандтля.

Однако нужно еще раз подчеркнуть, что уравнение импульсов не решает основного в теории пограничного слоя вопроса о распределении скоростей внутри слоя. Пользуясь уравнением импульсов, необходимо всегда в той или иной мере задавать распределение скоростей или другие зависимости, характеризующие движение в пограничном слое. Следовательно, необходимо хотя бы приближенно и в общей форме знать движение жидкости в слое, прежде чем применять уравнение импульсов. Во многих вопросах, например при расчете сопротивления трению, погрешности, допущенные при приближенном задании поля скоростей, не оказывают существенного влияния на результаты. Но в некоторых случаях, когда скорость в пограничном слое быстро изменяется вдоль контура тела, например вблизи точки отрыва вихрей, приближенное задание поля скоростей может оказаться не соответствующим действительности и привести к существенным ошибкам.

Перейдем теперь к применению общих методов теории пограничного слоя к наиболее простому и вместе с тем весьма важному случаю обтекания плоской пластинки потоком, направленным вдоль ее плоскости.

§ 5. Пограничный слой и сопротивление трению плоской пластинки в несжимаемой среде. Интегрирование уравнений движения для случая ламинарного течения в слое

Решение задачи о пограничном слое плоской пластинки является не только примером применения общих методов теории пограничного слоя, но имеет важное самостоятельное значение. Дело в том, что сопротивление бесконечно тонкой плоской пластинки, на которую набегает поток вдоль ее плоскости, происходит исключительно от касательных напряжений; нормальные напряжения в этом случае взаимно уравновешиваются. Таким образом, плоская пластинка, поставленная вдоль потока, является как бы идеальным удобообтекаемым телом. Так как, вдобавок, вычисления, относящиеся к пограничному слою такой пластинки, наиболее просты и могут быть доведены до конца в общем виде, то очень часто при всякого рода приблизительных расчетах этими результатами пользуются, применяя их к другим удобообтекаемым телам, например к тонким крыльям на режиме максимальной скорости самолета, к удобообтекаемым телам вращения при нулевом угле атаки и т. д.

Применим сначала к пограничному слою плоской пластинки дифференциальные уравнения Прандтля. Эти уравнения принимают в данном случае наиболее простой вид. Дело в том, что при обтекании плоской пластинки вдоль ее плоскости скорость U в потенциальном потоке, окружающем пограничный слой, одинакова во всех точках и равна скорости потока V на бесконечности. Следовательно, в этом случае $dU/dx = 0$, а так как $dp/dx = -\rho U(dU/dx)$, то и $dp/dx = 0$. Поэтому уравнения (7.4) запишутся для данного случая следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.11}$$

Как известно из § 2 этой главы, левая часть первого из этих уравнений есть величина, пропорциональная V^2/L, где L есть характерный размер тела, а правая часть есть величина, пропорциональная $\nu\, V/\delta^2$; следовательно,

$$\frac{V^2}{L} \sim \nu \frac{V}{\delta^2}.$$