

ся не соответствующим действительности и привести к существенным ошибкам.

Перейдем теперь к применению общих методов теории пограничного слоя к наиболее простому и вместе с тем весьма важному случаю обтекания плоской пластинки потоком, направленным вдоль ее плоскости.

§ 5. Пограничный слой и сопротивление трению плоской пластинки в несжимаемой среде. Интегрирование уравнений движения для случая ламинарного течения в слое

Решение задачи о пограничном слое плоской пластинки является не только примером применения общих методов теории пограничного слоя, но имеет важное самостоятельное значение. Дело в том, что сопротивление бесконечно тонкой плоской пластинки, на которую набегает поток вдоль ее плоскости, происходит исключительно от касательных напряжений; нормальные напряжения в этом случае взаимно уравновешиваются. Таким образом, плоская пластинка, поставленная вдоль потока, является как бы идеальным удобообтекаемым телом. Так как, вдобавок, вычисления, относящиеся к пограничному слою такой пластинки, наиболее просты и могут быть доведены до конца в общем виде, то очень часто при всякого рода приблизительных расчетах этими результатами пользуются, применяя их к другим удобообтекаемым телам, например к тонким крыльям на режиме максимальной скорости самолета, к удобообтекаемым телам вращения при нулевом угле атаки и т. д.

Применим сначала к пограничному слою плоской пластинки дифференциальные уравнения Прандтля. Эти уравнения принимают в данном случае наиболее простой вид. Дело в том, что при обтекании плоской пластинки вдоль ее плоскости скорость U в потенциальном потоке, окружающем пограничный слой, одинакова во всех точках и равна скорости потока V на бесконечности. Следовательно, в этом случае $dU/dx = 0$, а так как $dp/dx = -\rho U(dU/dx)$, то и $dp/dx = 0$. Поэтому уравнения (7.4) запишутся для данного случая следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

Как известно из § 2 этой главы, левая часть первого из этих уравнений есть величина, пропорциональная V^2/L , где L есть характерный размер тела, а правая часть есть величина, пропорциональная $\nu V/\delta^2$; следовательно,

$$\frac{V^2}{L} \sim \nu \frac{V}{\delta^2}.$$

Решая последнее соотношение относительно δ , находим:

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu L}{V}}.$$

Эта зависимость между продольным размером в слое L и поперечным δ подсказывает аналогичную зависимость между соответствующими переменными величинами. Так как

$$y \sim \delta, \quad x \sim L$$

(где x отсчитывается от входного ребра пластинки), то можно написать:

$$y \sim \sqrt{\frac{\nu x}{V}}.$$

Обозначим здесь безразмерный коэффициент пропорциональности через $2\bar{\eta}$; тогда будем иметь:

$$\bar{\eta} = \frac{1}{2} y \sqrt{\frac{V}{\nu x}}.$$

Примем теперь $\bar{\eta}$ за новую независимую переменную (вместо y) и будем искать решение уравнений (7.11) для v_x в виде функции одной только переменной $\bar{\eta}$:

$$v_x = \frac{1}{2} V f'(\bar{\eta}),$$

где штрих у f есть знак производной. Для того чтобы удовлетворить второму из уравнений (7.11), т. е. уравнению неразрывности, введем функцию тока ψ для течения в пограничном слое. Как известно (гл. IV), функция тока является общим решением уравнения неразрывности движения в случае плоского потока. Выражение для функции тока легко найти, если вспомнить, что

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

В данном случае

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{2} V f'(\bar{\eta}),$$

и так как

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\eta}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{V}{\nu x}},$$

то

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\eta}} = \sqrt{V \nu x} f'(\bar{\eta}).$$

Следовательно, с точностью до произвольной постоянной

$$\psi = \sqrt{V \nu x} f(\bar{\eta}).$$

Теперь можно выразить через единственную неизвестную $f(\bar{\eta})$ все величины, входящие в первое из уравнений (7.11). Из последнего равенства находим:

$$\begin{aligned} v_y &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{Vv}{x}} f(\bar{\eta}) - \sqrt{Vvx} f'(\bar{\eta}) \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Vv}{x}} (\bar{\eta} f' - f); \end{aligned}$$

кроме того, имеем:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{V}{4} \sqrt{\frac{V}{vx}} f''; \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{4} \frac{V}{x} \bar{\eta} f''; \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{V^2}{8vx} f'''.$$

После подстановки этих выражений в первое из уравнений (7.11) получается:

$$-\frac{V^2}{8x} \bar{\eta} f' f'' + \frac{V^2}{8x} f'' (\bar{\eta} f' - f) = \frac{V^2}{8x} f'''.$$

Множитель, содержащий x , здесь одинаков во всех слагаемых, он сокращается, и вместо двух дифференциальных уравнений в частных производных (7.11) мы получаем одно обыкновенное дифференциальное уравнение для функции f

$$f''' + ff'' = 0. \quad (7.12)$$

Таким образом, подтверждается предположение о том, что для v_x существует решение в виде функции одной только переменной $\bar{\eta}$.

Блазиус проинтегрировал¹⁾ уравнение (7.12) с помощью степенных рядов для малых значений $\bar{\eta}$ и асимптотического выражения для больших $\bar{\eta}$, причем принял следующие граничные условия: при $\bar{\eta} = 0$ $f' = 0$ (это соответствует условию: $v_x = 0$ при $y = 0$); при $\bar{\eta} = 0$ $f = 0$ (это соответствует условию: $v_y = 0$ при $y = 0$); при $\bar{\eta} = \infty$ $f' = 2$ (это соответствует условию: $v_x = V$ при $y = \infty$).

Как видно из этих условий, уравнения пограничного слоя распространены здесь на весь поток, т. е. предполагается, что скорость потенциального обтекания достигается при удалении от поверхности пластинки не на конечном расстоянии δ от нее, а лишь на бесконечно большом расстоянии. Местная скорость должна при этом асимптотически приближаться к скорости на бесконечности. Такая постановка вопроса отличается как называемую *теорию асимптотического слоя* от теории слоя конечной толщины, о которой речь шла до сих пор. Теория асимптотического слоя является более строгой, нежели теория слоя конечной толщины, так как не оперирует с неточно определяемым понятием толщины слоя. Она удобна, кроме того, потому, что

¹⁾ Blasius H., Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung, Zeitschrift für Mathematik und Physik, т. 56, 1908.

в ней меньше неизвестных величин, нежели в теории слоя конечной толщины, так как неизвестная величина δ здесь отсутствует.

Таблица 5

$\bar{\eta}$	$\frac{v_x}{V}$	$\bar{\eta}$	$\frac{v_x}{V}$	$\bar{\eta}$	$\frac{v_x}{V}$	$\bar{\eta}$	$\frac{v_x}{V}$
0	0	0,8	0,5168	1,6	0,8761	2,4	0,9878
0,1	0,0664	0,9	0,5748	1,7	0,9018	2,5	0,9915
0,2	0,1328	1,0	0,6298	1,8	0,9233	2,6	0,9942
0,3	0,1989	1,1	0,6813	1,9	0,9411	2,7	0,9962
0,4	0,2647	1,2	0,7290	2,0	0,9555	2,8	0,9975
0,5	0,3293	1,3	0,7725	2,1	0,9670	2,9	0,9984
0,6	0,3938	1,4	0,8115	2,2	0,9759	3,0	0,9990
0,7	0,4563	1,5	0,8460	2,3	0,9827		

Мы опускаем вычисления, связанные с интегрированием уравнения (7.12), так как они не представляют здесь самостоятельного интереса, и даем лишь окончательные результаты. Степенной ряд, который получается при малых значениях $\bar{\eta}$ для искомой функции $f(\bar{\eta})$, имеет вид

$$f(\bar{\eta}) = \frac{\alpha \bar{\eta}^2}{2!} - \frac{\alpha^2 \bar{\eta}^5}{5!} + \frac{11\alpha^3 \bar{\eta}^8}{8!} - \frac{375\alpha^4 \bar{\eta}^{11}}{11!} + \frac{27897\alpha^5 \bar{\eta}^{14}}{14!} - \dots$$

причем константа $\alpha = 1,32824$.

Зная $f(\bar{\eta})$, можно найти отношение

$$\frac{v_x}{V} = \frac{1}{2} f'(\bar{\eta}).$$

Значения безразмерной скорости v_x/V приведены в табл. 5, которая дает численное представление о распределении скоростей в пограничном слое плоской пластинки.

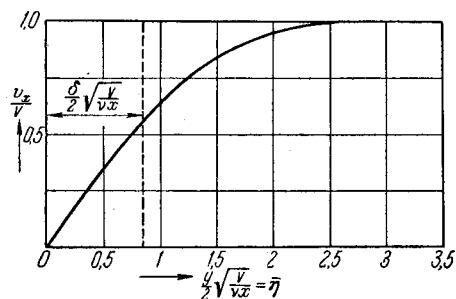


Рис. 7.6. Зависимость v_x/V_∞ от $\bar{\eta}$ для ламинарного пограничного слоя плоской пластинки.

Зависимость v_x/V от $\bar{\eta}$ дана также на рис. 7.6 в виде графика, построенного по данным этой таблицы.

Как видно из этой таблицы и из графика, значения v_x/V нарастают при удалении от пластинки весьма быстро. Теоретически v_x/V должно быть равно единице лишь при $\bar{\eta} = \infty$, т. е. на бесконечно большом расстоянии от пластинки. В действительности уже при $\bar{\eta} = 3$ $v_x/V = 0,9990$, т. е. отличается от единицы на 0,1%. Если условно определить толщину пограничного слоя δ как такое расстояние от поверхности тела, на котором скорость отли-

чается на 1% от скорости, соответствующей потенциальному обтеканию, то в данном случае, как видно из таблицы, при $y = \delta$ $\eta = 2,45$. Подставляя эти значения в формулу для η , находим:

$$\frac{1}{2} \delta \sqrt{\frac{V}{\nu x}} = 2,45,$$

откуда

$$\delta = 4,90 \sqrt{\frac{\nu x}{V}},$$

что находится в полном соответствии с общей зависимостью (7.3)¹⁾.

Кроме обстоятельств, которые были отмечены в § 2 в связи с соотношением (7.3), здесь следует обратить внимание на зависимость δ от x :

$$\delta \sim \sqrt{x}.$$

Следовательно, внешняя граница пограничного слоя плоской пластинки представляет собой в случае ламинарного движения па-

раболу, осью которой является ось x , а вершиной — точка входа потока на пластинку. Это изображено на рис. 7.7, на котором, кроме того, показан примерный вид линий тока.

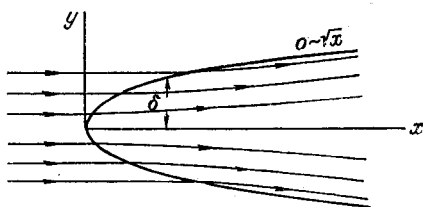


Рис. 7.7. Внешняя граница ламинарного пограничного слоя плоской пластинки представляет собой параболу, осью которой служит ось x .

¹⁾ Толщина пограничного слоя, как уже подчеркивалось, есть величина условная и поэтому в значительной мере неопределенная. Для того чтобы избежать этой неопределенности, в теории асимптотического слоя рассматривают вместо толщины пограничного слоя δ так называемую «толщину вытеснения» δ_{*1} (несколько отличную от введенной в § 3), для которой может быть дано совершенно точное определение. Математически «толщина вытеснения» δ_{*1} определяется для рассматриваемого случая плоской пластинки следующим равенством:

$$\delta_{*1} = \frac{1}{V} \int_0^{\infty} (V - v_x) dy.$$

Отличие от δ_* заключается в том, что верхним пределом интеграла здесь является ∞ , а не конечная, но неопределенная величина δ . Интеграл в последней формуле представляет собой, очевидно, разность между расходом жидкости сквозь сечение, нормальное к пластинке, в случае обтекания пластинки идеальной жидкостью и расходом через то же сечение в случае обтекания ее реальной жидкостью. Эта разность, как видно из формулы, равна $V \delta_{*1}$; следовательно, δ_{*1} есть толщина некоторого слоя, сквозь сечение которого протекало бы в единицу времени при постоянной во всех точках скорости, равной V , количество жидкости, равное уменьшению расхода от торможения частиц.

Если вычислить для пластинки δ_{*1} по распределению скоростей, найденному Блазиусом, то получается:

$$\delta_{*1} = 1,73 \sqrt{\frac{\nu x}{V}}.$$

Зная распределение скоростей в пограничном слое, можно определить величину касательных напряжений, приложенных к поверхности пластинки. В самом деле,

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu \frac{V}{4} \sqrt{\frac{V}{\nu x}} f''_{\eta=0} = \frac{\alpha}{4} \sqrt{\frac{\rho \mu V^3}{x}}$$

Подставляя вместо α его численное значение, получаем:

$$\tau_0 = 0,332 \sqrt{\frac{\rho \mu V^3}{x}} = 0,664 \frac{\rho V^2}{2} \sqrt{\frac{\nu}{Vx}}. \quad (7.13)$$

Эта формула показывает, что при ламинарном течении в пограничном слое касательные напряжения пропорциональны $V^{3/2}$ (тогда как при малых числах Рейнольдса, для которых имеет место закон Стокса — Озина и весь поток, окружающий тело, — ламинарный, касательные напряжения пропорциональны первой степени скорости).

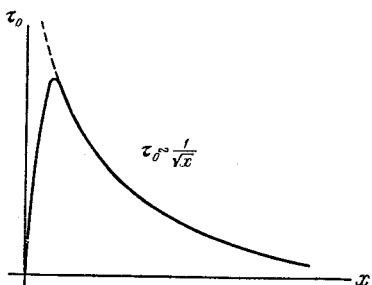


Рис. 7.8. Распределение касательных напряжений вдоль плоской пластинки при ламинарном движении в пограничном слое.

Из этой же формулы видно, что при обтекании плоской пластинки касательные напряжения убывают при удалении от входной кромки обратно пропорционально корню квадратному из расстояния до нее. Несомненно, однако, что этот закон нельзя применять в непосредственной близости к входной кромке, ибо при $x = 0$ он дает $\tau_0 = \infty$, чего не может быть. В действительности, т. е. у реальной пластинки, а не бесконечно тонкой, значению $x = 0$ соответствует

критическая точка, и так как скорость в этой точке равна нулю, то должно быть и $\tau_0 = 0$. Поэтому действительное распределение касательных напряжений вдоль плоской пластинки будет таким, какое показано на рис. 7.8 сплошной линией. Величина промежутка, к которому неприменима формула (7.13), существенно зависит от формы входной части пластинки, в частности, от того, имеет ли входная часть вид острия или закругления¹⁾.

Формула (7.13) позволяет также вычислить сопротивление трению плоской пластинки и, следовательно, теоретически определить для нее коэффициент сопротивления.

Имея в виду приложения полученных здесь результатов к другим удобообтекаемым телам, вычислим сопротивление трению *одной* стороны пластинки; ее полное сопротивление трению будет в два раза

¹⁾ С математической точки зрения $x = 0$ является особой точкой преобразования координат $\eta = f(x)$, ибо при $x = 0$ $\eta = \infty$. Поэтому уравнение для f в окрестности этой точки не соответствует действительности. На самом деле при $x = 0$ δ не равно нулю и τ_0 не равно бесконечности.

больше. Одностороннее сопротивление трению плоской пластинки длиной L и шириной 1 равно

$$Q_{\text{тр}} = \int_0^L \tau_0 dx = 0,332 \sqrt{\rho\mu} V^3 \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{x}} = 0,332 \cdot 2 \sqrt{\rho\mu} V^3 L.$$

Отсюда находим коэффициент сопротивления $c_{\text{хтр}}$, отнесенный к площади одной стороны пластинки,

$$c_{\text{хтр}} = \frac{Q_{\text{тр}}}{\frac{\rho V^2}{2} L \cdot 1} = \frac{0,664 \sqrt{\rho\mu} V^3 L}{\frac{\rho V^2}{2} L} = 1,328 \sqrt{\frac{\nu}{VL}}.$$

Если обозначить через R число Рейнольдса, в котором характерной длиной служит длина пластинки и характерной скоростью —

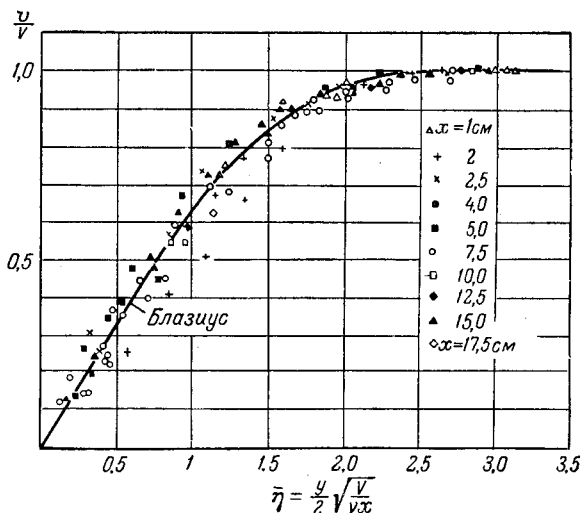


Рис. 7.9. Зависимость v_x/V_∞ от $\bar{\eta}$ для ламинарного пограничного слоя плоской пластинки по экспериментальным данным.

скорость потока на бесконечности, то последнее равенство может быть записано в виде

$$c_{\text{хтр}} = \frac{1,328}{\sqrt{R}}. \quad (7.14)$$

Таким образом, при ламинарном течении в пограничном слое коэффициент сопротивления убывает с возрастанием числа Рейнольдса обратно пропорционально корню квадратному из него.

Выводы теории, изложенные в этом параграфе, подвергались неоднократной экспериментальной проверке¹⁾. В частности, распределение

¹⁾ См., например, Nikuradse I., Laminare Reibungsschichten an der längsangeströmten Platte, Zentrale f. Wiss. Berichtwesen, 1942.

скоростей в пограничном слое плоской пластинки было измерено как с помощью теплоанемометра, так и с помощью микротрубки полного давления. Результаты измерения для тонкой гладкой пластинки (толщиной в 2,5 мм) с заостренной входной кромкой показаны на рис. 7.9; они изображены здесь в той же системе координат, которая уже применялась на рис. 7.8: по оси абсцисс отложены значения $\bar{\eta} = \frac{1}{2}y \sqrt{\frac{V}{\nu x}}$, по оси ординат — значения v_x/V ; сплошной линией изображена теоретическая кривая Блазиуса. Можно констатировать, в общем, хорошее совпадение теории с экспериментом, так как почти при всех значениях x экспериментальные точки следуют «универсальному», (т. е. пригодному для всех x) теоретическому закону.

§ 6. Применение уравнения импульсов к ламинарному пограничному слою плоской пластинки в несжимаемой среде

До сих пор, говоря о плоской пластинке, мы исходили из дифференциальных уравнений Прандтля. Применим теперь к пограничному слою плоской пластинки уравнение импульсов. Для этого нужно приближенно задать распределение скоростей. Наиболее простой способ задания скоростей в пограничном слое, применимый, вообще говоря, для любого тела, состоит в изображении v_x в виде степенного ряда, расположенного по степеням y :

$$v_x = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2 + \dots$$

Коэффициенты этого ряда $a_0(x), a_1(x), a_2(x), \dots$ можно определить из граничных условий, т. е. условий, которым должна удовлетворять скорость v_x и ее производные на границах слоя. Некоторые из этих условий непосредственно следуют из определения пограничного слоя. На поверхности обтекаемого тела, т. е. при $y=0$, $v_x=0$; на внешней границе слоя, т. е. при $y=\delta$, $v_x=U$. Так как, кроме того, на внешней границе слоя касательное напряжение равно нулю, а по закону Ньютона $\tau = \mu \partial v_x / \partial y$, то отсюда следует, что при $y=\delta$ $\partial v_x / \partial y = 0$.

Другие граничные условия могут быть выведены из уравнений Прандтля (7.4). Полагая в первом из этих уравнений $y=0$ и принимая во внимание, что при $v_x=0$ и $v_y=0$, получим:

$$\text{при } y=0 \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}.$$

Полагая в том же уравнении $y=\delta$ и принимая во внимание, что при этом $v_x=U$ и $\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$, а по уравнению (7.7)

$$-U(\partial U / \partial x) = (1/\rho) \cdot (dp/dx),$$