скоростей в пограничном слое плоской пластинки было измерено как с помощью теплоанемометра, так и с помощью микротрубки полного давления. Результаты измерения для тонкой гладкой пластинки (толщиной в 2,5 *мм*) с заостренной входной кромкой показаны на рис. 7.9; они изображены здесь в той же системе координат, которая уже применялась на рис. 7.8: по оси абсцисс отложены значения $\bar{\eta}=\frac{1}{2}y\sqrt{\frac{V}{\nu x}}$, по оси ординат — значения v_x/V; сплошной линией изображена теоретическая кривая Блазиуса. Можно констатировать, в общем, хорошее совпадение теории с экспериментом, так как почти при всех значениях x экспериментальные точки следуют «универсальному», (т. е. пригодному для всех x) теоретическому закону.

§ 6. Применение уравнения импульсов к ламинарному пограничному слою плоской пластинки в несжимаемой среде

До сих пор, говоря о плоской пластинке, мы исходили из дифференциальных уравнений Прандтля. Применим теперь к пограничному слою плоской пластинки уравнение импульсов. Для этого нужно приближенно задаться распределением скоростей. Наиболее простой способ задания скоростей в пограничном слое, применимый, вообще говоря, для любого тела, состоит в изображении v_x в виде степенного ряда, расположенного по степеням y:

$$v_x=a_0(x)+a_1(x)y+a_2(x)y^2+\ldots$$

Коэффициенты этого ряда $a_0(x), a_1(x), a_2(x), \ldots$ можно определить из граничных условий, т. е. условий, которым должна удовлетворять скорость v_x и ее производные на границах слоя. Некоторые из этих условий непосредственно следуют из определения пограничного слоя. На поверхности обтекаемого тела, т. е. при $y=0$, $v_x=0$; на внешней границе слоя, т. е. при $y=\delta$, $v_x=U$. Так как, кроме того, на внешней границе слоя касательное напряжение равно нулю, а по закону Ньютона $\tau=\mu\,\partial v_x/\partial y$, то отсюда следует, что при $y=\delta$ $\partial v_x/\partial y=0$.

Другие граничные условия могут быть выведены из уравнений Прандтля (7.4). Полагая в первом из этих уравнений $y=0$ и принимая во внимание, что при $v_x=0$ и $v_y=0$, получим:

$$\text{при } y=0 \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}.$$

Полагая в том же уравнении $y=\delta$ и принимая во внимание, что при этом $v_x=U$ и $\frac{\partial v_x}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial v_x}{\partial y}=0$, а по уравнению (7.7)

$$-U(\partial U/\partial x)=(1/\rho)\cdot(dp/dx),$$

получим:

$$\text{при } y=\delta \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}=0.$$

Из уравнений Прандтля можно вывести и дальнейшие граничные условия[1]), но уже установленные пять граничных условий дают возможность определить пять коэффициентов в разложении v_x, что оказывается вполне достаточным в случае плоской пластинки.

Для простоты дальнейших вычислений, которые должны лишь иллюстрировать применение уравнения импульсов, ограничимся в разложении v_x по степеням y первыми двумя слагаемыми, т. е. примем, что в случае плоской пластинки

$$v_x=a_0+a_1 y.$$

Для определения коэффициентов a_0 и a_1 воспользуемся граничными условиями: при $y=0$ $v_x=0$ и при $y=\delta$ $v_x=V$. Из этих условий следует, что $a_0=0$ и $a_1=V/\delta$ и, таким образом,

$$v_x=\frac{V}{\delta} y.$$

Касательное напряжение на поверхности пластинки τ_0 определяется при ламинарном течении по формуле Ньютона

$$\tau_0=\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}.$$

---

[1]) Так, например, для того чтобы определить величину производной третьего порядка от v_x при $y=\delta$ и $y=0$, продифференцируем первое уравнение Прандтля по y

$$\frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_x\frac{\partial^2 v_x}{\partial y\,\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_y\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}=\nu\frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3}.$$

Член, содержащий давление p, при дифференцировании обращается в нуль, так как в пограничном слое p от y не зависит. Принимая во внимание, что для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\frac{\partial v_x}{\partial y}=\frac{\partial v_x}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)=0,$$

можно предыдущее равенство написать в виде

$$v_x\frac{\partial^2 v_x}{\partial y\,\partial x}+v_y\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}=\nu\frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3}.$$

Полагая в этом уравнении $y=0$ и учитывая, что при этом v_x и v_y обращаются в нуль, находим:

$$\text{при } y=0\ \frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3}=0.$$

Аналогичным путем, т. е. дифференцируя повторно по y первое из уравнений Прандтля и полагая затем всякий раз $y=0$ и $y=\delta$, можно вычислить значения какого угодно числа последовательных производных от v_x на границах слоя.

Следовательно, в данном случае

$$\tau_0 = \mu \frac{V}{\delta}.$$

Так как при обтекании плоской пластинки вдоль ее плоскости $dp/dx = 0$, то для несжимаемой жидкости уравнение импульсов имеет в этом случае следующий вид:

$$\rho \frac{d}{dx}\int_0^\delta v_x^2 dy - \rho V \frac{d}{dx}\int_0^\delta v_x\, dy = -\tau_0, \tag{7.15}$$

или

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho V^2},$$

где ϑ есть толщина потери импульса. Вычислим интегралы, входящие в это уравнение,

$$\int_0^\delta v_x^2\, dy = \left(\frac{V}{\delta}\right)^2 \int_0^\delta y^2\, dy = \frac{1}{3} V^2 \delta;$$

$$\int_0^\delta v_x\, dy = \frac{V}{\delta}\int_0^\delta y\, dy = \frac{1}{2} V\delta.$$

Подставляя найденные величины в интегральное соотношение Кармана и заменяя τ_0 его выражением через δ, получаем:

$$\frac{1}{3}\rho V^2 \frac{d\delta}{dx} - \frac{1}{2}\rho V^2 \frac{d\delta}{dx} = -\mu \frac{V}{\delta},$$

или

$$\frac{1}{6}\rho V \frac{d\delta}{dx} = \frac{\mu}{\delta}.$$

Как уже указывалось в предыдущем, уравнение импульсов приводится к дифференциальному уравнению для толщины пограничного слоя δ. В данном случае — это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, и его можно написать в виде

$$\delta d\delta = \frac{6\nu}{V} dx.$$

Интегрируя, находим:

$$\delta^2 = \frac{12\nu x}{V} + C.$$

Постоянную интегрирования C определим из условия: на передней кромке пластинки, т. е. в точке $x = 0$, $\delta = 0$. Из этого условия получается, что $C = 0$ и, следовательно,

$$\delta = \sqrt{\frac{12\nu x}{V}} = 3,46\sqrt{\frac{\nu x}{V}}.$$

Касательное напряжение τ_0 получается равным

$$\tau_0 = \frac{\mu V}{\delta} = 0{,}289 \sqrt{\frac{\mu \rho V^3}{x}}.$$

Эта формула отличается от точной формулы (7.13), полученной в результате интегрирования уравнений Прандтля, лишь величиной численного коэффициента (0,289 вместо 0,332).

Таким образом, даже при весьма грубом приближении в задании поля скоростей (был принят линейный закон для v_x, весьма далекий от истины) уравнение импульсов позволяет определить величину касательного напряжения с неплохой степенью точности.

Величины δ и τ_0 могут быть вычислены точнее, если вместо двух слагаемых в разложении v_x по степеням y взять три, четыре или пять слагаемых, воспользоваться соответствующими граничными условиями и проделать выкладки, аналогичные тем, которые были выполнены для первого приближения.

Получающиеся при этом соответственно второе, третье и четвертое приближения весьма быстро сходятся к точным формулам. Об этом свидетельствует помещенная здесь таблица, в которой приведены результаты этих вычислений.

Таблица 6

	Приближения				
	I	II	III	IV	Точное решение
$\frac{\delta_*}{\sqrt{\nu x/V}}$	1,73	1,83	1,74	1,75	1,73
$\frac{\tau_0}{\sqrt{\mu\rho V^3/x}}$	0,289	0,365	0,323	0,343	0,332

§ 7. Пограничный слой плоской пластинки в несжимаемой среде при числах Рейнольдса, бóльших критического

Все изложенное в двух предыдущих параграфах относится к случаю, когда в пограничном слое плоской пластинки движение жидкости ламинарное. Опыты показывают, что в действительности ламинарное течение в пограничном слое плоской пластинки возможно лишь в случае, если число Рейнольдса, в котором за характерную длину принята толщина пограничного слоя, т. е. $\mathrm{R}_\delta = V\delta/\nu$ (переменное вдоль длины пластинки), не превышает некоторого значения, называемого критическим. Это значение не является фиксированным; оно зависит от условий входа потока на пластинку, состояния ее поверхности и от степени турбулентности набегающего потока. По известным в настоящее время экспериментальным данным можно считать, что критическое значение числа Рейнольдса находится в пределах от $\mathrm{R}_\delta = 1650$ до $\mathrm{R}_\delta = 5750$.