

Касательное напряжение τ_0 получается равным

$$\tau_0 = \frac{\mu V}{\delta} = 0,289 \sqrt{\frac{\mu \rho V^3}{x}}.$$

Эта формула отличается от точной формулы (7.13), полученной в результате интегрирования уравнений Прандтля, лишь величиной численного коэффициента (0,289 вместо 0,332).

Таким образом, даже при весьма грубом приближении в задании поля скоростей (был принят линейный закон для v_x , весьма далекий от истины) уравнение импульсов позволяет определить величину касательного напряжения с неплохой степенью точности.

Величины δ и τ_0 могут быть вычислены точнее, если вместо двух слагаемых в разложении v_x по степеням y взять три, четыре или пять слагаемых, воспользоваться соответствующими граничными условиями и проделать выкладки, аналогичные тем, которые были выполнены для первого приближения.

Получающиеся при этом соответственно второе, третье и четвертое приближения весьма быстро сходятся к точным формулам. Об этом свидетельствует помещенная здесь таблица, в которой приведены результаты этих вычислений.

Таблица 6

	Приближения				Точное решение
	I	II	III	IV	
$\frac{\delta_*}{\sqrt{\nu x/V}}$	1,73	1,83	1,74	1,75	1,73
$\frac{\tau_0}{\sqrt{\mu \rho V^3/x}}$	0,289	0,365	0,323	0,343	0,332

§ 7. Пограничный слой плоской пластинки в несжимаемой среде при числах Рейнольдса, больших критического

Все изложенное в двух предыдущих параграфах относится к случаю, когда в пограничном слое плоской пластинки движение жидкости ламинарное. Опыты показывают, что в действительности ламинарное течение в пограничном слое плоской пластинки возможно лишь в случае, если число Рейнольдса, в котором за характерную длину принята толщина пограничного слоя, т. е. $R_\delta = V\delta/\nu$ (переменное вдоль длины пластинки), не превышает некоторого значения, называемого критическим. Это значение не является фиксированным; оно зависит от условий входа потока на пластинку, состояния ее поверхности и от степени турбулентности набегающего потока. По известным в настоящее время экспериментальным данным можно считать, что критическое значение числа Рейнольдса находится в пределах от $R_\delta = 1650$ до $R_\delta = 5750$.

Так как толщина пограничного слоя δ связана определенным соотношением с абсциссой x , отсчитываемой от входного ребра пластинки, то можно вместо числа Рейнольдса, в которое входит толщина пограничного слоя, рассматривать число Рейнольдса $R_x = Vx/\nu$, в котором за характерную длину принято расстояние x . Ясно, что каждому значению R_δ соответствует определенное значение R_x . В частности, указанным пределам для $R_{\delta_{кр}}$ соответствуют пределы для значений $R_{x_{кр}}$ от $9 \cdot 10^4$ до $1,1 \cdot 10^6$.

На основании опытных данных можно заключить, что чем меньше степень турбулентности набегающего потока, чем меньше возмущений вносится в пограничный слой у входа на пластинку, наконец, чем меньше степень шероховатости пластинки, тем выше критическое значение числа Рейнольдса.

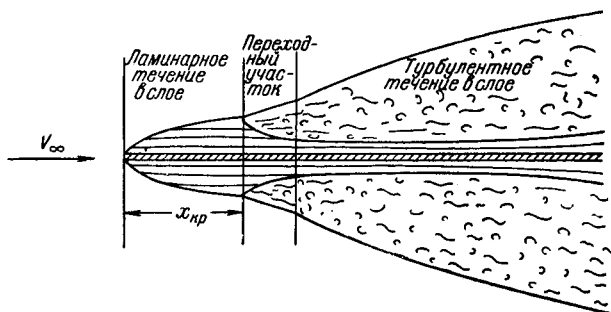


Рис. 7.10. Схема пограничного слоя плоской пластинки при числах Рейнольдса, больших критического.

При числах Рейнольдса, больших критического, ламинарный режим течения в пограничном слое нарушается. Непосредственно за сечением, в котором число Рейнольдса достигает критического значения, находится переходный участок, в котором могут существовать переменные во времени области как ламинарного, так и турбулентного течения, а за этим переходным участком движение в пограничном слое является турбулентным (рис. 7.10). Однако и при числах Рейнольдса, больших критического, турбулентное движение имеет место не по всей толщине пограничного слоя, а лишь на некотором расстоянии от поверхности пластинки. В непосредственной близости к твердой поверхности поперечные к потоку пульсации скорости весьма малы по своей абсолютной величине, и движение здесь всегда ламинарное. Можно условно выделить внутри турбулентного пограничного слоя тонкую прослойку, примыкающую к поверхности пластинки, в которой течение является ламинарным. Эта прослойка называется ламинарным «подслоем» и аналогична ламинарному слою, образуемому на стенках трубы при турбулентном ядре течения. Полагают, что место перехода ламинарного течения в турбулентное

при увеличении расстояния от поверхности пластинки определяется критическим значением числа Рейнольдса $R_y = v_* y / \nu$, где y есть упомянутое расстояние ($R_{y_{кр}} \approx 11,5$).

С возрастанием числа Рейнольдса длина ламинарного участка, находящегося у входной кромки, убывает и может оказаться весьма малой по сравнению с длиной пластинки. Так, например, если число Рейнольдса

$$R = \frac{VL}{\nu} = 10^7,$$

где L есть длина пластинки вдоль потока, а критическое значение числа Рейнольдса $R_{x_{кр}}$ принять равным 10^5 , то нетрудно видеть, что длина ламинарного участка пограничного слоя $x_{кр}$ составляет в этом случае всего 1% от длины пластинки. В самом деле,

$$\frac{x_{кр}}{L} = \frac{R_{x_{кр}}}{R} = \frac{10^5}{10^7} = 0,01;$$

поэтому во многих случаях, когда числа Рейнольдса весьма велики, можно в расчетах пренебрегать наличием ламинарного пограничного слоя у входной кромки и рассматривать пограничный слой как турбулентный на всем протяжении длины пластинки.

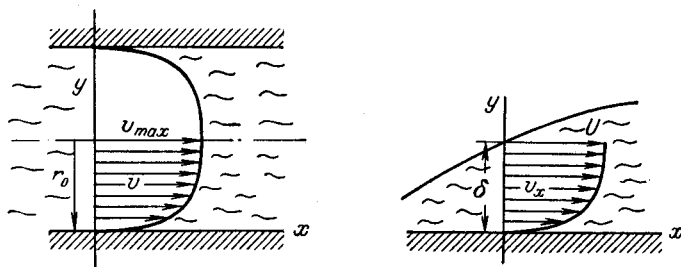


Рис. 7.11. Распределение скорости v_x по сечению турбулентного пограничного слоя приближенно считается таким же, как распределение скоростей по радиусу трубы. Роль радиуса играет при этом толщина слоя δ , роль скорости на оси трубы v_{max} — скорость на внешней границе слоя U .

Для того чтобы вычислить толщину турбулентного пограничного слоя и касательные напряжения, приложенные к пластинке, будем пользоваться уравнением импульсов. Оно требует, как известно из предыдущего, двух дополнительных уравнений, связывающих скорость в пограничном слое и касательное напряжение на поверхности тела с толщиной слоя. Наиболее простой способ составления этих дополнительных уравнений основан на гипотезе о том, что распределение скоростей по толщине турбулентного пограничного слоя подчиняется тому же закону, что и распределение скоростей по радиусу цилиндрической трубы (рис. 7.11). Эта гипотеза оказывается весьма плодотворной, так как она позволяет применить к случаю «внешней» задачи

огромный экспериментальный материал, накопленный по исследованию турбулентного течения в цилиндрических трубах. С теоретической точки зрения эта гипотеза не вполне безукоризненна. Дело в том, что распределение скоростей по толщине пограничного слоя изменяется по длине пластинки и, следовательно, течение в пограничном слое плоской пластинки ускоренное, тогда как течение за разгонным участком в цилиндрической трубе происходит без ускорений.

Несомненно, что ускорения частиц влияют на распределение скоростей и поэтому не может быть точного совпадения распределения скоростей по толщине пограничного слоя и по радиусу трубы. Однако влияние ускорения в случае плоской пластинки, по-видимому, весьма незначительно, и результаты применения этой гипотезы с достаточной для практических целей степенью точности соответствуют действительности.

§ 8. Применение степенного закона распределения скоростей к турбулентному пограничному слою плоской пластинки в несжимаемой среде

Рассмотрим числа Рейнольдса, для которых при течении по трубе справедлив закон корня седьмой степени. Распределение скоростей в этом случае может быть записано в виде формулы (6.27)

$$\frac{v_x}{v_*} = 8,57 \left(\frac{v_* y}{\nu} \right)^{1/7}$$

(осредненная скорость, направленная параллельно стенке трубы, обозначена здесь через v_x ; в гл. VI мы обозначили ее через \bar{v}). Допустим, что эта же формула применима и к турбулентному пограничному слою. Положим $y = \delta$; тогда v_x будет равно скорости U на внешней границе слоя, и последняя формула примет вид

$$\frac{U}{v_*} = 8,57 \left(\frac{v_* \delta}{\nu} \right)^{1/7}. \quad (7.16)$$

Разделим друг на друга соответственно левые и правые части этих равенств; в результате получим:

$$v_x = U \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7}. \quad (7.17)$$

Мы имеем, таким образом, соотношение между скоростью в пограничном слое и его толщиной. Последняя формула вполне аналогична соответствующей формуле для распределения скоростей по сечению трубы (6.26) и отличается от нее лишь тем, что радиус трубы заменен здесь толщиной пограничного слоя, а скорость на оси трубы — скоростью на внешней границе пограничного слоя.