

огромный экспериментальный материал, накопленный по исследованию турбулентного течения в цилиндрических трубах. С теоретической точки зрения эта гипотеза не вполне безукоризненна. Дело в том, что распределение скоростей по толщине пограничного слоя изменяется по длине пластинки и, следовательно, течение в пограничном слое плоской пластинки ускоренное, тогда как течение за разгонным участком в цилиндрической трубе происходит без ускорений.

Несомненно, что ускорения частиц влияют на распределение скоростей и поэтому не может быть точного совпадения распределения скоростей по толщине пограничного слоя и по радиусу трубы. Однако влияние ускорения в случае плоской пластинки, по-видимому, весьма незначительно, и результаты применения этой гипотезы с достаточной для практических целей степенью точности соответствуют действительности.

### § 8. Применение степенного закона распределения скоростей к турбулентному пограничному слою плоской пластинки в несжимаемой среде

Рассмотрим числа Рейнольдса, для которых при течении по трубе справедлив закон корня седьмой степени. Распределение скоростей в этом случае может быть записано в виде формулы (6.27)

$$\frac{v_x}{v_*} = 8,57 \left( \frac{v_* y}{\nu} \right)^{1/7}$$

(осредненная скорость, направленная параллельно стенке трубы, обозначена здесь через  $v_x$ ; в гл. VI мы обозначили ее через  $\bar{v}$ ). Допустим, что эта же формула применима и к турбулентному пограничному слою. Положим  $y = \delta$ ; тогда  $v_x$  будет равно скорости  $U$  на внешней границе слоя, и последняя формула примет вид

$$\frac{U}{v_*} = 8,57 \left( \frac{v_* \delta}{\nu} \right)^{1/7}. \quad (7.16)$$

Разделим друг на друга соответственно левые и правые части этих равенств; в результате получим:

$$v_x = U \left( \frac{y}{\delta} \right)^{1/7}. \quad (7.17)$$

Мы имеем, таким образом, соотношение между скоростью в пограничном слое и его толщиной. Последняя формула вполне аналогична соответствующей формуле для распределения скоростей по сечению трубы (6.26) и отличается от нее лишь тем, что радиус трубы заменен здесь толщиной пограничного слоя, а скорость на оси трубы — скоростью на внешней границе пограничного слоя.

Для того чтобы получить соотношение между касательным напряжением  $\tau_0$  и толщиной пограничного слоя, воспользуемся равенством (7.16). Решая его относительно  $v_*$ , находим:

$$v_* = \frac{1}{8,57^{7/8}} U^{7/8} \left(\frac{v}{\delta}\right)^{1/8}.$$

Подставим в это равенство вместо  $v_*$  его выражение через  $\tau_0$ : ( $v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ ) и определим  $\tau_0$ ; результаты вычисления можно записать в виде

$$\tau_0 = 0,0450 \frac{\rho U^2}{2} \left(\frac{v}{U\delta}\right)^{1/4}. \quad (7.18)$$

Применим теперь уравнение импульсов, которое для случая плоской пластинки изображается равенством (7.15). Вычислим интегралы, входящие в это равенство,

$$\int_0^\delta v_x^2 dy = V^2 \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{2/7} dy = \frac{7}{9} V^2 \delta,$$

$$\int_0^\delta v_x dy = V \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} dy = \frac{7}{8} V \delta.$$

Подставляя найденные величины в равенство (7.15) и воспользовавшись для  $\tau_0$  формулой (7.18), получим:

$$\frac{7}{9} \rho V^2 \frac{d\delta}{dx} - \frac{7}{8} \rho V^2 \frac{d\delta}{dx} = -0,0450 \frac{\rho V^2}{2} \left(\frac{v}{V\delta}\right)^{1/4},$$

или

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{72 \cdot 0,0450}{7 \cdot 2} \left(\frac{v}{V\delta}\right)^{1/4}.$$

Таким образом, применение формул (7.17) и (7.18) приводит уравнение импульсов к дифференциальному уравнению для толщины пограничного слоя. В данном случае можно отделить переменные в этом уравнении; тогда получится:

$$\delta^{1/4} d\delta = 0,2315 \left(\frac{v}{V}\right)^{1/4} dx.$$

Интегрируя, находим:

$$\frac{4}{5} \delta^{5/4} = 0,2315 \left(\frac{v}{V}\right)^{1/4} x + C,$$

где  $C$  есть постоянная интегрирования, которую нужно определить из начального условия: при  $x = x_{кр}$   $\delta = \delta_{кр}$ . Величину  $x_{кр}$  здесь можно определить, приняв определенное значение для  $R_{кр}$ , а соответствующее значение  $\delta_{кр}$  — по формулам для ламинарного пограничного слоя. Но ввиду того, что при больших числах Рейнольдса ламинарный участок у входного ребра пластинки занимает относительно небольшую часть ее длины, пренебрежем здесь ламинарным участком слоя и его влиянием на толщину турбулентного слоя, т. е. будем считать,

что пограничный слой турбулентен на всем протяжении пластинки, начиная от входного ребра. (Случай, когда длины ламинарного и турбулентного участков пограничного слоя суть величины одного и того же порядка, будет разобран ниже.) Начальное условие для определения  $C$  тогда запишется в виде: при  $x=0$   $\delta=0$ , откуда следует, что и  $C=0$ . Мы получаем в результате следующую формулу для толщины турбулентного пограничного слоя плоской пластинки:

$$\delta = 0,37 \left( \frac{\nu}{Vx} \right)^{1/5} x.$$

Соответствующая формула для относительной толщины слоя будет иметь вид

$$\frac{\delta}{L} = 0,37 \left( \frac{\nu}{VL} \right)^{1/5} \left( \frac{x}{L} \right)^{4/5}.$$

Следует отметить, что толщина турбулентного пограничного слоя нарастает вдоль пластинки значительно быстрее, нежели толщина ламинарного слоя: при турбулентном слое, как видно из последней формулы,  $\delta \sim x^{4/5}$ , тогда как при ламинарном  $\delta \sim x^{1/2}$ . Это следует приписать влиянию перемешивания частиц, что, как известно, является характерным для турбулентного потока. С возрастанием числа Рейнольдса относительная толщина пограничного слоя убывает.

Подставляя найденное значение  $\delta$  в формулу (7.18), получим величину касательного напряжения на поверхности пластинки при турбулентном пограничном слое

$$\tau_0 = 0,0578 \frac{\rho V^2}{2} \left( \frac{\nu}{Vx} \right)^{1/5}. \quad (7.19)$$

Отсюда видно, что касательное напряжение на поверхности пластинки убывает при удалении от входной кромки, однако менее интенсивно, нежели в случае ламинарного пограничного слоя (при ламинарном слое  $\tau_0 \sim x^{-1/2}$ , тогда как здесь  $\tau_0 \sim x^{-1/5}$ ).

Последняя формула, кроме того, показывает, что касательное напряжение при турбулентном пограничном слое численно значительно больше, нежели при ламинарном при тех же значениях  $Vx/\nu$ . Так, например, если  $Vx/\nu = 10^6$ , то по формуле (7.13) для ламинарного пограничного слоя

$$\tau_0 = 0,664 \cdot 10^{-3} \frac{\rho V^2}{2},$$

тогда как по формуле (7.19) для турбулентного пограничного слоя

$$\tau_0 = 0,0578 \cdot 10^{-5/6} \frac{\rho V^2}{2} = 3,64 \cdot 10^{-3} \frac{\rho V^2}{2},$$

т. е. почти в шесть раз больше, чем при ламинарном течении. Таким образом, переход ламинарного течения в пограничном слое в турбулентное сопровождается резким возрастанием касательных напряжений.

Вычислим теперь сопротивление трению плоской пластинки, предполагая по-прежнему, что пограничный слой турбулентен на всем протяжении ее длины. Рассмотрим пластинку шириной 1 и длиной вдоль потока  $L$ ; сопротивление трению одной стороны ее равно

$$\begin{aligned} Q_{\text{тр}} &= \int_0^L \tau_0 dx \cdot 1 = 0,0578 \frac{\rho V^2}{2} \left(\frac{\nu}{V}\right)^{1/5} \int_0^L x^{-1/5} dx = \\ &= \frac{5 \cdot 0,0578}{4} \frac{\rho V^2}{2} \left(\frac{\nu}{VL}\right)^{1/5} L = 0,072 \frac{\rho V^2}{2} \left(\frac{\nu}{VL}\right)^{1/5} L. \end{aligned}$$

Отсюда находим, что коэффициент сопротивления трению для одной стороны пластинки равен

$$c_{x\text{тр}} = \frac{Q_{\text{тр}}}{\frac{\rho V^2}{2} L \cdot 1} = 0,072 \left(\frac{\nu}{VL}\right)^{1/5}$$

или, иначе,

$$c_{x\text{тр}} = \frac{0,072}{R^{1/5}}, \quad (7.20)$$

где через  $R$  обозначено число Рейнольдса, в котором характерной длиной является длина пластинки  $L$ .

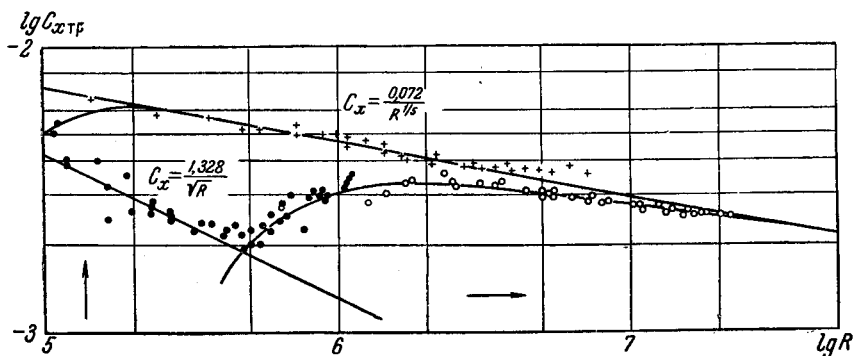


Рис. 7.12. Зависимость коэффициента сопротивления трения плоской пластинки от числа Рейнольдса по формулам (7.14) и (7.20).

Если изобразить последнюю зависимость в логарифмической системе координат, т. е. откладывать по оси абсцисс  $\lg R$ , а по оси ординат  $\lg c_{x\text{тр}}$ , то получится прямая линия, уравнение которой имеет вид

$$\lg c_{x\text{тр}} = \lg 0,072 - \frac{1}{5} \lg R.$$

Угловым коэффициентом этой прямой равен  $-1/5$ . Если в той же системе координат изобразить зависимость (7.14), соответствующую ламинарному пограничному слою, то получится также прямая линия, но с угловым коэффициентом, равным  $-1/2$ . На рис. 7.12 показаны

обе упомянутые прямые, а также примерное очертание переходной области между ними, в которой  $c_{хтр}$  возрастает. Как уже указывалось выше, единой переходной кривой здесь не существует, так как в зависимости от турбулентности набегающего потока, состояния поверхности пластинки и других обстоятельств критическое число Рейнольдса может изменяться в пределах от  $9 \cdot 10^4$  до  $1,1 \cdot 10^6$ .

Формула (7.20) находится в хорошем согласии с экспериментальными данными. Однако опыты показали, что для лучшего соответствия теоретических результатов с экспериментальными коэффициент 0,072 в формуле (7.20) должен быть заменен коэффициентом 0,074 и в соответствии с этим коэффициент 0,0578 в формуле (7.19) — коэффициентом 0,0592. Формула для  $c_{хтр}$  плоской пластинки при турбулентном пограничном слое принимает, таким образом, следующий вид:

$$c_{хтр} = \frac{0,074}{R^{1/5}}. \quad (7.21)$$

Опыты показывают, что эта формула, как и закон корня седьмой степени, на котором она основана, применимы лишь при не очень больших числах Рейнольдса. Применимость последней формулы ограничивается числом Рейнольдса, равным приблизительно  $R = 2 \cdot 10^7$ ; при значениях числа Рейнольдса, больших  $2 \cdot 10^7$ , эта формула дает преуменьшенные значения  $c_{хтр}$ .

Можно вывести формулы для  $c_{хтр}$  при больших числах Рейнольдса, аналогичные формуле (7.21), если принять для распределения скоростей в пограничном слое степенной закон в общем виде, т. е. с переменным показателем степени  $n$ :

$$\frac{v_x}{v_*} = B \left( \frac{v_* y}{\delta} \right)^n. \quad (7.22)$$

Коэффициент  $B$  в этой формуле и показатель степени  $n$  представляют собой функции числа Рейнольдса. Из равенства (7.22) могут быть выведены формулы для распределения скоростей и касательного напряжения на поверхности пластинки, соответственно обобщающие формулы (7.17) и (7.18),

$$v_x = U \left( \frac{y}{\delta} \right)^n \quad (7.23)$$

и

$$\tau_0 = \xi \frac{\rho U^2}{2} \left( \frac{v}{U \delta} \right)^{2n/(n+1)}, \quad (7.24)$$

где через  $\xi$  обозначено  $2B^{-2n/(n+1)}$ . Воспользовавшись формулами (7.23) и (7.24) и уравнением импульсов, можно с помощью вычислений, аналогичных тем, которые были проделаны выше для закона одной седьмой степени, найти выражения толщины пограничного слоя и  $c_{хтр}$ , соответствующие общему степенному закону. Однако результаты, как и исходная формула (7.22), имеют тот недостаток,

что они не являются универсальными для всех чисел Рейнольдса. Кроме того, показатель степени  $n$  и коэффициент  $\xi$  в формуле для  $\tau_0$  представляют собой, строго говоря, величины, переменные по длине пластинки, ибо они зависят от  $R_\delta$  (зависимость этих величин от  $R = \frac{VL}{\nu}$

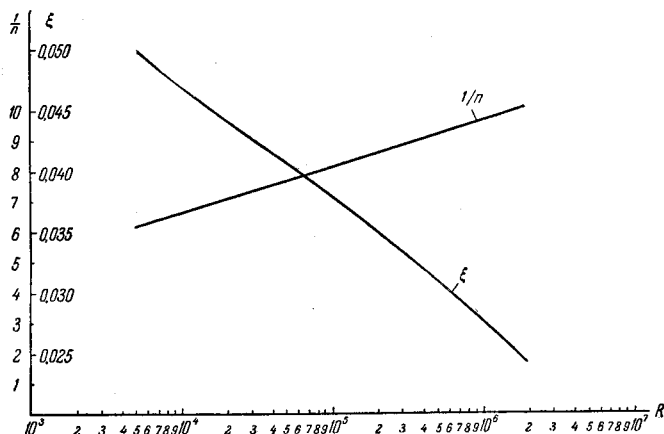


Рис. 7.13. Зависимость показателя степени  $n$  и коэффициента трения при степенном законе распределения скоростей от числа Рейнольдса (по данным опытов Никурадзе).

изображена на рис. 7.13) и, следовательно, являются функциями искомого  $\delta$ . Если учитывать это, то вычисления получаются весьма громоздкими. Предпочтительнее поэтому оказывается иной способ анализа турбулентного пограничного слоя, основанный на универсальном логарифмическом законе распределения скоростей.

### § 9. Применение логарифмического закона распределения скоростей к турбулентному пограничному слою плоской пластинки в несжимаемой среде

Исходной формулой при применении логарифмического закона распределения скоростей является формула (6.18)

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{v_* y}{\nu} + \text{const}.$$

Имея в виду исключить константу в правой части, положим в этом равенстве  $y = \delta$ ; при этом  $v_x$  равно  $U$  и, следовательно,

$$\frac{U}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{v_* \delta}{\nu} + \text{const}. \quad (7.25)$$

Из последних двух равенств получается:

$$\frac{v_x - U}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{\delta}. \quad (7.26)$$