

что они не являются универсальными для всех чисел Рейнольдса. Кроме того, показатель степени n и коэффициент ξ в формуле для τ_0 представляют собой, строго говоря, величины, переменные по длине пластинки, ибо они зависят от R_δ (зависимость этих величин от $R = \frac{VL}{\nu}$

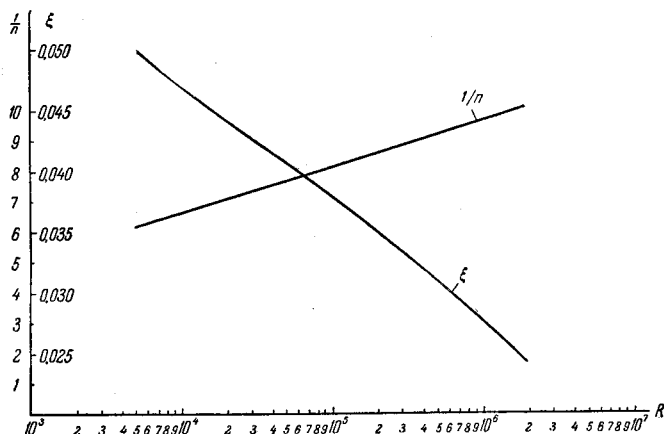


Рис. 7.13. Зависимость показателя степени n и коэффициента трения при степенном законе распределения скоростей от числа Рейнольдса (по данным опытов Никурадзе).

изображена на рис. 7.13) и, следовательно, являются функциями искомого δ . Если учитывать это, то вычисления получаются весьма громоздкими. Предпочтительнее поэтому оказывается иной способ анализа турбулентного пограничного слоя, основанный на универсальном логарифмическом законе распределения скоростей.

§ 9. Применение логарифмического закона распределения скоростей к турбулентному пограничному слою плоской пластинки в несжимаемой среде

Исходной формулой при применении логарифмического закона распределения скоростей является формула (6.18)

$$\frac{v_x}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{v_* y}{\nu} + \text{const}.$$

Имея в виду исключить константу в правой части, положим в этом равенстве $y = \delta$; при этом v_x равно U и, следовательно,

$$\frac{U}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{v_* \delta}{\nu} + \text{const}. \quad (7.25)$$

Из последних двух равенств получается:

$$\frac{v_x - U}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{\delta}. \quad (7.26)$$

Отсюда находим:

$$v_x = U - \frac{v_*}{x} \ln \frac{\delta}{y}. \quad (7.27)$$

Отметим, что, как видно из формулы (7.26), отношение $(v_x - U)/v_*$ зависит только от y/δ и, следовательно, в сходственных точках (т. е. в точках, для которых y/δ одинаково) сохраняет постоянную величину. Можно поэтому сказать, что в турбулентном пограничном слое поле безразмерной «скорости» $(v_x - U)/v_*$ сохраняет кинематическое подобие во всех сечениях слоя, нормальных к контуру тела.

Если подставить в уравнение импульсов вместо v_x выражение (7.27), а вместо δ его выражение из равенства (7.25), то получится дифференциальное уравнение для v_* . Для случая, когда v_* есть малая величина, это уравнение можно приближенно проинтегрировать, а затем, зная v_* , найти коэффициент касательного напряжения $\bar{\tau}_0$ из формулы

$$v_* = \sqrt{\frac{\bar{\tau}_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{\bar{\tau}_0 \rho V^2}{\rho}} = V \sqrt{\frac{\bar{\tau}_0}{2}}.$$

Опуская промежуточные выкладки, мы приведем лишь окончательное соотношение для $\bar{\tau}_0$:

$$\bar{\tau}_0^{-1/2} = A \lg (R_x \bar{\tau}_0) + B, \quad (7.28)$$

где A и B суть некоторые константы. Таким образом, коэффициент касательного напряжения $\bar{\tau}_0$ при турбулентном пограничном слое следует логарифмическому закону.

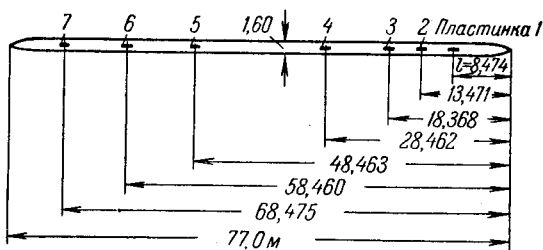


Рис. 7.14. Определение коэффициента местного касательного напряжения в опытах Кемпфа. Расположение измерительных пластинок на дне понтона.

Логарифмический закон для коэффициента касательного напряжения блестяще подтверждается опытами Кемпфа¹⁾. Эти опыты интересны тем, что в них непосредственно измерялось местное касательное напряжение, а не суммарная сила трения, действующая на плоскую пластинку. Кроме того, в этих опытах удалось значительно расши-

¹⁾ К е м п ф Г., Neue Ergebnisse der Widerstandsforschung, Werft, Reederei und Hafen, 10, 1929.

рить область исследованных чисел Рейнольдса, доведя ее до $R = 5 \cdot 10^8$. Кемпф экспериментировал, протаскивая в гидроканале (длиной в 350 м) понтоны, из дна которых были вырезаны небольшие, по сравнению с размерами понтона, пластинки; эти пластинки оставались во время

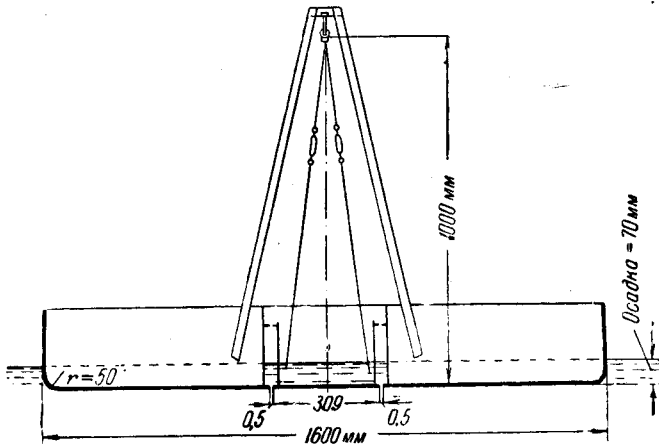


Рис. 7.15. Определение коэффициента местного касательного напряжения в опытах Кемпфа. Поперечное сечение понтона и подвеска измерительной пластинки.

опыта на своих местах, имея возможность совершать малые колебания в плоскости дна понтона. При протаскивании измерялось сопротивление трению каждой такой пластинки. Размеры понтона и расположение измерительных пластинок показаны на рис. 7.14, а поперечное сечение понтона вместе с подвеской измерительной пластинки — на рис. 7.15. Дно понтона было тщательно отлакировано и отполировано. Большая длина понтона позволяла пренебрегать длиной ламинарного участка пограничного слоя у входной кромки. Таким образом, условия опыта здесь были весьма близки к теоретическим предположениям, при которых выведен логарифмический закон для коэффициента касательного напряжения. Результаты измерений изображены на

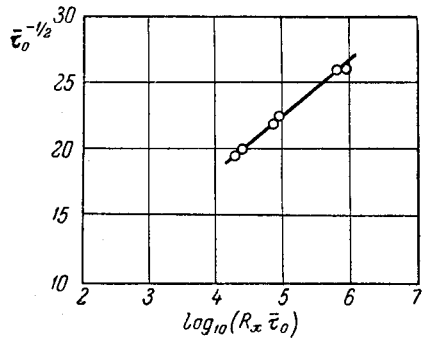


Рис. 7.16. Зависимость $\bar{\tau}_0^{-1/2}$ от $\lg(R_x \bar{\tau}_0)$.

рис. 7.16, из которого следует, что между $\bar{\tau}_0^{-1/2}$ и $\lg(R_x \bar{\tau}_0)$ имеет место линейная зависимость, как это и должно быть по теоретической формуле (7.28). По опытам Кемпфа могут быть определены численные значения постоянных A и B ; они оказываются, соответственно,

равными 4,15 и 1,7 и, следовательно, логарифмический закон для коэффициента касательного напряжения может быть записан в виде

$$\bar{\tau}_0^{-1/2} = 4,15 \lg (R_x \bar{\tau}_0) + 1,7. \quad (7.29)$$

Для того чтобы на основании этой формулы судить о распределении касательного напряжения по длине пластинки, продифференцируем последнее равенство почленно по x и найдем $d\bar{\tau}_0/dx$. В результате получим:

$$\frac{d\bar{\tau}_0}{dx} = - \frac{8,30 \bar{\tau}_0^{-3/2}}{x (1 - 8,30 \bar{\tau}_0^{-1/2})}.$$

Опыты показывают, что коэффициент касательного напряжения есть величина малая, порядка 0,001 — 0,005 (для гладких пластинок). При этих значениях $\bar{\tau}_0$, как видно из последней формулы, $d\bar{\tau}_0/dx$ есть величина отрицательная и, значит, $\bar{\tau}_0$ с возрастанием x убывает. Однако чем больше x , тем меньше абсолютная величина $d\bar{\tau}_0/dx$. Это свидетельствует о том, что с возрастанием x коэффициент касательного напряжения убывает все медленнее и при весьма больших значениях x его можно считать величиной практически постоянной.

Перейдем теперь к вычислению толщины пограничного слоя. Для этого следует использовать формулу (7.26), которая после замены в ней v_* на $V\sqrt{\bar{\tau}_0}/2$ и перехода от натуральных логарифмов к десятичным принимает вид

$$\bar{\tau}_0^{-1/2} = A_1 \lg \left(\frac{\delta V}{v} \bar{\tau}_0^{-1/2} \right) + B_1,$$

где A_1 и B_1 суть некоторые константы. Эта формула аналогична формуле (6.31) с той лишь разницей, что здесь вместо средней скорости фигурирует максимальная, а вместо диаметра трубы или ее радиуса — толщина пограничного слоя. Если сопоставить последнюю формулу с результатами экспериментов Никурадзе над гладкими трубами, то значения постоянных A_1 и B_1 оказываются соответственно равными 4,15 и 3,6. Таким образом, соотношение между коэффициентом касательного напряжения и толщиной слоя может быть записано в виде

$$\bar{\tau}_0^{-1/2} = 4,15 \lg \left(\frac{\delta V}{v} \bar{\tau}_0^{-1/2} \right) + 3,6. \quad (7.30)$$

Для того чтобы найти δ как функцию x , решим совместно уравнения (7.29) и (7.30). Вычитая почленно из уравнения (7.30) уравнение (7.29), находим:

$$4,15 \lg \left(\frac{\delta}{x V \bar{\tau}_0} \right) + 1,9 = 0;$$

отсюда

$$\frac{\delta}{x} = 0,348 \sqrt{\bar{\tau}_0}.$$

Последнее равенство показывает, что толщина турбулентного пограничного слоя плоской пластинки нарастает при удалении от входной кромки пропорционально произведению $x\sqrt{\tau_0}$. При весьма больших значениях x , для которых, как указывалось выше, τ_0 можно считать величиной практически постоянной, толщина турбулентного пограничного слоя приблизительно пропорциональна x , т. е. нарастает приблизительно по линейному закону.

Зная распределение касательных напряжений по длине пластинки, можно вычислить и коэффициент сопротивления трению.

Если для вычисления τ_0 воспользоваться логарифмическим законом (формула (7.29)), то зависимость $c_{хтр}$ от числа Рейнольдса получается в неявном и притом неудобном для вычислений виде. Поэтому мы опускаем здесь вывод этой зависимости. На практике обычно пользуются интерполяционными формулами, которые составлены по значениям $c_{хтр}$, вычисленным на основании упомянутой точной зависимости. Одна из наиболее удачных интерполяционных формул имеет вид

$$c_{хтр} = \frac{0,455}{(\lg R)^{2,58}}, \quad (7.31)$$

где R есть число Рейнольдса, равное VI/ν . Как показывают опытные данные, эту формулу можно применять на всем диапазоне исследованных до настоящего времени чисел Рейнольдса, соответствующих турбулентному пограничному слою, т. е. приблизительно от $R=10^5$ до $R=10^9$.

Наряду с формулой (7.31) можно применять также другую формулу, выведенную на основании логарифмического закона для касательных напряжений:

$$c_{хтр}^{-1/2} = 4,13 \lg(Rc_{хтр}). \quad (7.32)$$

Численные коэффициенты подобраны здесь так, что получается наилучшее соответствие формулы результатам опытов. Недостатком формулы (7.32) является то, что она дает $c_{хтр}$ в неявном виде.

§ 10. Влияние места перехода ламинарного движения в турбулентное на сопротивление трения плоской пластинки в несжимаемой среде

Все изложенное до сих пор относительно сопротивления плоской пластинки при турбулентном движении в пограничном слое относится к случаю, когда длина ламинарного участка слоя пренебрежимо мала по сравнению с длиной турбулентного. Однако при сравнительно небольших числах Рейнольдса, превышающих его критическое значение (т. е. при числах Рейнольдса приблизительно от $R=10^5$ до $R=5 \cdot 10^6$), длина ламинарного участка у входной кромки пластинки