

Последнее равенство показывает, что толщина турбулентного пограничного слоя плоской пластинки нарастает при удалении от входной кромки пропорционально произведению $x\sqrt{\tau_0}$. При весьма больших значениях x , для которых, как указывалось выше, τ_0 можно считать величиной практически постоянной, толщина турбулентного пограничного слоя приблизительно пропорциональна x , т. е. нарастает приблизительно по линейному закону.

Зная распределение касательных напряжений по длине пластинки, можно вычислить и коэффициент сопротивления трению.

Если для вычисления τ_0 воспользоваться логарифмическим законом (формула (7.29)), то зависимость $c_{хтр}$ от числа Рейнольдса получается в неявном и притом неудобном для вычислений виде. Поэтому мы опускаем здесь вывод этой зависимости. На практике обычно пользуются интерполяционными формулами, которые составлены по значениям $c_{хтр}$, вычисленным на основании упомянутой точной зависимости. Одна из наиболее удачных интерполяционных формул имеет вид

$$c_{хтр} = \frac{0,455}{(\lg R)^{2,58}}, \quad (7.31)$$

где R есть число Рейнольдса, равное VI/ν . Как показывают опытные данные, эту формулу можно применять на всем диапазоне исследованных до настоящего времени чисел Рейнольдса, соответствующих турбулентному пограничному слою, т. е. приблизительно от $R=10^5$ до $R=10^9$.

Наряду с формулой (7.31) можно применять также другую формулу, выведенную на основании логарифмического закона для касательных напряжений:

$$c_{хтр}^{-1/2} = 4,13 \lg(Rc_{хтр}). \quad (7.32)$$

Численные коэффициенты подобраны здесь так, что получается наилучшее соответствие формулы результатам опытов. Недостатком формулы (7.32) является то, что она дает $c_{хтр}$ в неявном виде.

§ 10. Влияние места перехода ламинарного движения в турбулентное на сопротивление трения плоской пластинки в несжимаемой среде

Все изложенное до сих пор относительно сопротивления плоской пластинки при турбулентном движении в пограничном слое относится к случаю, когда длина ламинарного участка слоя пренебрежимо мала по сравнению с длиной турбулентного. Однако при сравнительно небольших числах Рейнольдса, превышающих его критическое значение (т. е. при числах Рейнольдса приблизительно от $R=10^5$ до $R=5 \cdot 10^6$), длина ламинарного участка у входной кромки пластинки

представляет собой величину того же порядка, что и длина турбулентного.

Предыдущие формулы для $c_{x_{тр}}$ при этом неприменимы, так как здесь нельзя пренебрегать наличием ламинарного участка пограничного слоя. В этом случае необходимо учитывать при вычислении $c_{x_{тр}}$ как ламинарный, так и турбулентный участки слоя.

Наиболее простой способ вычисления $c_{x_{тр}}$ для указанной области чисел Рейнольдса был предложен Прандтлем. Прандтль вводит две гипотезы, значительно упрощающие изучение вопроса.

Он предполагает, во-первых, что переходная область пограничного слоя занимает участок, пренебрежимо малый по своей длине, иными словами, что переход от ламинарного движения в слое к турбулентному совершается внезапно, как только струйки проходят через сечение $x = x_{кр}$. Таким образом, вместо переходной зоны речь будет

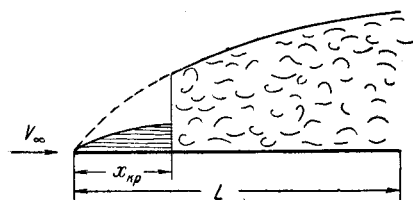


Рис. 7.17. Упрощенная схема пограничного слоя плоской пластинки. Движение в турбулентной части слоя предполагается таким же, как если бы турбулентный слой начинался от входной кромки.

идти о *точке перехода* $x = x_{кр}$. Во-вторых, Прандтль предполагает, что турбулентный участок пограничного слоя за сечением $x = x_{кр}$ имеет такие же толщину, распределение скоростей и касательных напряжений, как если бы он начинался непосредственно от входной кромки. Таким образом, получается упрощенная схема пограничного слоя плоской пластинки, изображенная (для одной стороны пластинки) на рис. 7.17. След-

дует иметь в виду, что эта схема удобна лишь для расчета; физическая же картина явления получается здесь неправильная. Так, например, толщина пограничного слоя, а вместе с ней касательные напряжения и скорости изменяются по этой схеме разрывно при переходе через сечение $x = x_{кр}$; на самом деле все эти величины изменяются вдоль пластинки непрерывно и на движение в турбулентной части слоя влияет длина ламинарного участка.

Приняв изложенные здесь гипотезы, можно следующим образом учесть влияние ламинарного участка на величину сопротивления трению. Пусть $Q_{тр}$ будет сопротивление пластинки длиной L и шириной, равной единице, вычисленное в предположении, что пограничный слой на всем протяжении пластинки турбулентный (т. е., например, по формулам (7.21), (7.30) или (7.32)). Так как на самом деле передняя часть пластинки до сечения $x = x_{кр}$ занята ламинарным слоем, то очевидно, необходимо из $Q_{тр}$ вычесть сопротивление трению передней части пластинки (до сечения $x = x_{кр}$), которое предполагалось при вычислении $Q_{тр}$ происходящим от турбулентного слоя, и прибавить к полученной разности сопротивление трению той же передней части пластинки в условиях ламинарного слоя. Сопротивление остальной

части пластинки следует при этом оставить без изменения на основании второй гипотезы.

Сопротивление передней части пластинки при турбулентном пограничном слое можно записать в виде $c_{x\text{турб}}(\rho V^2/2)x_{\text{кр}}$; сопротивление той же передней части пластинки при ламинарном пограничном слое можно записать в виде $c_{x\text{лам}}(\rho V^2/2)x_{\text{кр}}$; здесь $c_{x\text{турб}}$ и $c_{x\text{лам}}$ суть коэффициенты сопротивления плоской пластинки, соответствующие одному и тому же критическому значению числа Рейнольдса $R_{\text{кр}} = Vx_{\text{кр}}/\nu$, но относящиеся в одном случае к везде турбулентному, в другом — к везде ламинарному течению в слое.

Так как первое из упомянутых сопротивлений нужно вычесть из $Q_{\text{тр}}$, а второе прибавить, то изменение $Q_{\text{тр}}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Delta Q_{\text{тр}} &= -c_{x\text{турб}}(R_{\text{кр}}) \frac{\rho V^2}{2} x_{\text{кр}} + c_{x\text{лам}}(R_{\text{кр}}) \frac{\rho V^2}{2} x_{\text{кр}} = \\ &= -\frac{\rho V^2}{2} [c_{x\text{турб}}(R_{\text{кр}}) - c_{x\text{лам}}(R_{\text{кр}})] x_{\text{кр}}. \end{aligned}$$

Деля почленно обе части этого равенства на $(\rho V^2/2)L$, получим изменение $c_{x\text{тр}}$ плоской пластинки, происходящее от наличия ламинарного участка,

$$\begin{aligned} \Delta c_{x\text{тр}} &= -\frac{[c_{x\text{т}}(R_{\text{кр}}) - c_{x\text{л}}(R_{\text{кр}})] x_{\text{кр}}}{L} = \\ &= \frac{[c_{x\text{т}}(R_{\text{кр}}) - c_{x\text{л}}(R_{\text{кр}})] \frac{Vx_{\text{кр}}}{\nu}}{\frac{VL}{\nu}} = -\frac{A}{R}, \end{aligned}$$

где

$$A = [c_{x\text{т}}(R_{\text{кр}}) - c_{x\text{л}}(R_{\text{кр}})] R_{\text{кр}} = 0,074 R_{\text{кр}}^{-1/5} - 1,328 R_{\text{кр}}^{-1/2},$$

на основании формул (7.21) и (7.14). Так как $c_{x\text{турб}}$ и $c_{x\text{лам}}$ соответствуют критическому значению числа Рейнольдса, то величина A зависит только от тех обстоятельств, которыми определяется значение $R_{\text{кр}}$, т. е. от шероховатости пластинки, степени турбулентности набегающего потока и условий входа потока на пластинку: $A = f(R_{\text{кр}})$. Для данной пластинки и заданной степени турбулентности набегающего потока A есть величина постоянная. Как видно из выражения для A , это — величина всегда положительная. Таким образом, $\Delta c_{x\text{тр}}$ есть величина всегда отрицательная (как это и должно быть по смыслу вводимой здесь поправки) и при данных степени турбулентности потока и шероховатости пластинки — величина, обратно пропорциональная числу Рейнольдса.

Если коэффициент сопротивления плоской пластинки при сплошь турбулентном пограничном слое определять, например, по формуле (7.21), то, внося в эту формулу найденную поправку, получим, что $c_{x\text{тр}}$ с учетом ламинарного участка пограничного слоя равен

$$c_{x\text{тр}} = \frac{0,074}{R^{1/5}} - \frac{A(R_{\text{кр}})}{R}. \quad (7.33)$$

Разумеется, вместо формулы (7.21) можно здесь применять любую другую формулу, выведенную для турбулентного слоя.

Численное значение коэффициента A , как показывают результаты опытов, может изменяться в весьма широких пределах. Для гладких пластинок, которым соответствует относительно большое значение критического числа Рейнольдса, коэффициент A может быть принят равным 1700. Увеличение степени турбулентности набегающего потока или степени шероховатости пластинки уменьшает критическое значение числа Рейнольдса, а вместе с ним и значение коэффициента A . Для шероховатых пластинок A равно приблизительно 300. Таким образом,

$$300 \leq A \leq 1700.$$

Кривые изменения $c_{xтр}$ для плоской пластинки, соответствующие этим предельным значениям A , ограничивают переходную область, расположенную между областью чисел Рейнольдса, при которых пограничный слой — ламинарный, и областью чисел Рейнольдса, при котором он — турбулентный (рис. 7.18). Нетрудно видеть, что в этой переходной области $c_{xтр}$ возрастает при возрастании числа Рейнольдса.

При данном числе Рейнольдса коэффициент $c_{xтр}$ может иметь в переходной области любое значение между ограничивающими область кривыми в зависимости от места перехода ламинарного течения в слое в турбулентное, т. е. в зависимости от величины $R_{кр}$. Поэтому результатами экспериментального определения $c_{xтр}$ в переходной области нужно пользоваться с большой осторожностью. Значения $c_{xтр}$, определенные, например, путем продувки в аэродинамической трубе, могут отличаться более чем в два раза от значения $c_{xтр}$ в свободной атмосфере при тех же числах Рейнольдса, если только в аэродинамической трубе иная, нежели в атмосфере, степень турбулентности и, следовательно, иное место перехода ламинарного течения пограничного слоя в турбулентное.

Гипотеза о том, что движение в турбулентной части слоя не зависит от длины ламинарного участка, как уже указывалось, не соответствует действительности. В результате применения этой гипотезы распределение силы трения по длине пластинки получается разрывным в точке перехода. Можно избавиться от этого недостатка, если принять для расчета сопротивления пластинки несколько более общую схему, чем в начале этого параграфа¹⁾.

Предположим, что турбулентный пограничный слой за точкой перехода такой же, как если бы он начинался от точки, отстоящей от входного ребра на расстоянии, равном a (предыдущая схема получится из этой в частном случае $a = 0$). Величина a может быть затем определена из условия, что в точке перехода сила трения Q непрерывна

¹⁾ Collar A. R., A closed formula for the drag of a flat plate with transition, Journal of the R. A. S., January 1960.

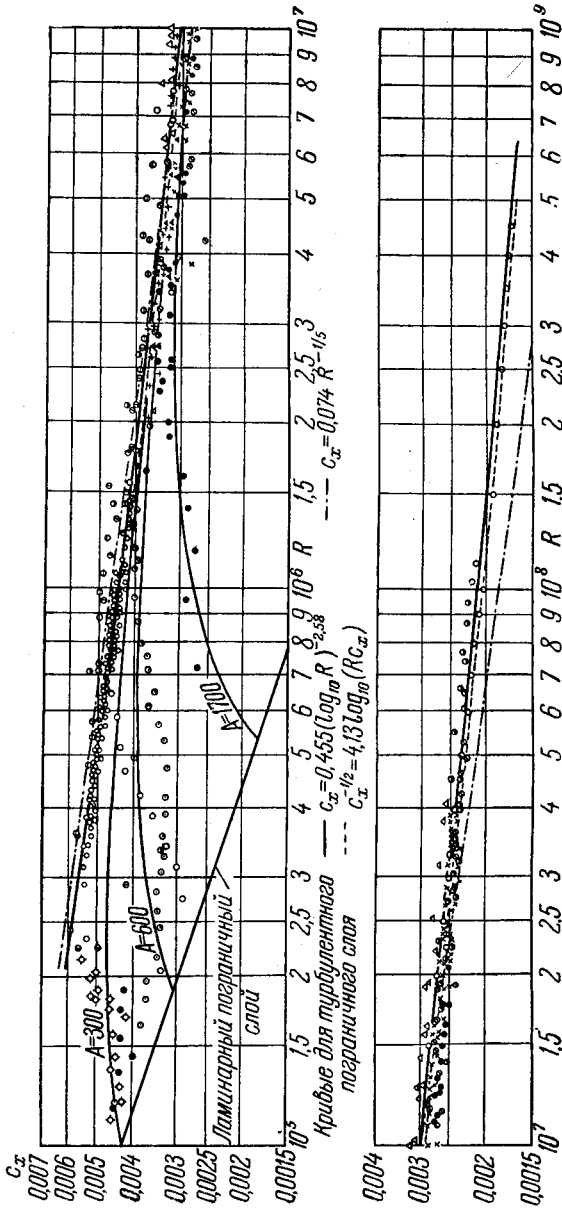


Рис. 7.18. Зависимость коэффициента сопротивления трения плоской пластинки от числа Рейнольдса.

или, что все равно, толщина потери импульса δ непрерывна. Как видно из чертежа (рис. 7.19), лобовое сопротивление пластинки может быть представлено в виде

$$Q = c_x \frac{\rho V^2}{2} L = c_{x\text{турб}} (R_1) \frac{\rho V^2}{2} (L - a) - \\ - c_{x\text{турб}} (R_{\text{кр}} - R_a) \frac{\rho V^2}{2} (x_{\text{кр}} - a) + c_{x\text{лам}} (R_{\text{кр}}) \frac{\rho V^2}{2} x_{\text{кр}};$$

здесь R_1 есть число Рейнольдса, определенное по длине $L - a$, т. е. равное $R - R_a$. Переходя в последнем равенстве к безразмерным коэффициентам, получим:

$$c_x = c_{x\text{турб}} (R_1) \frac{R_1}{R} - c_{x\text{турб}} (R_{\text{кр}} - R_a) \frac{R_{\text{кр}} - R_a}{R} + c_{x\text{лам}} (R_{\text{кр}}) \frac{R_{\text{кр}}}{R}.$$

Так как по предположению при $R = R_{\text{кр}}$ сила трения непрерывна, то последние два слагаемых должны быть равны друг другу. Из этого условия, подставляя выражения по известным из предыдущего формулам для c_x при сплошь ламинарном или при сплошь турбулентном пограничном слое,

$$c_{x\text{лам}} (R_{\text{кр}}) = \frac{1,328}{R_{\text{кр}}^{1/2}}, \quad c_{x\text{турб}} (R_{\text{кр}} - R_a) = \frac{0,074}{(R_{\text{кр}} - R_a)^{1/5}},$$

находим:

$$(R_{\text{кр}} - R_a)^{4/5} = \frac{1,328}{0,074} R_{\text{кр}}^{1/5}.$$

Решим это уравнение относительно R_a :

$$R_a = R_{\text{кр}} - \left(\frac{1,328}{0,074} \right)^{5/4} R_{\text{кр}}^{5/8} = R_{\text{кр}} - 36,9 R_{\text{кр}}^{5/8}.$$

Возвращаясь к формуле для c_x , в которой остается теперь только первое слагаемое, и подставляя вместо R_a его значение, будем иметь:

$$c_x = \frac{0,074}{R} \left(R - R_{\text{кр}} + 36,9 R_{\text{кр}}^{5/8} \right)^{4/5}.$$

При $R_{\text{кр}} = 0$ эта формула переходит в формулу для c_x при сплошь турбулентном течении, при $R_{\text{кр}} = R$ — в формулу для c_x при ламинарном течении. Численные значения c_x , которые получаются по этой формуле, близки к тем, которые дает формула (7.33).

Если исходить из гипотезы о непрерывном изменении силы трения вдоль пластинки, то касательные напряжения и толщина слоя в его турбулентной части будут существенно зависеть от места перехода. Чем дальше от входной кромки расположено место перехода, тем меньше будет в турбулентной части толщина слоя и, следовательно (как показывает формула (7.18)), тем больше будет здесь ка-

сательное напряжение. Это иллюстрируется рис. 7.20, на котором изображено распределение касательных напряжений по длине плоской пластинки для двух случаев. В одном случае точка перехода ламинарного движения в турбулентное находится на расстоянии от входной кромки, равном 5% длины пластинки, в другом случае — на расстоянии, равном 25% длины пластинки. Кривая *A* изображает распределение касательных напряжений вдоль ламинарного участка пограничного слоя, кривая *B* — распределение касательных напряжений вдоль турбулентного участка в первом случае, кривая *C* — то же во втором случае. Из чертежа видно (по величине площади, ограничиваемой соответствующими кривыми), что чем дальше от входной кромки находится точка перехода ламинарного движения в турбулентное, тем меньше сопротивление трения плоской пластинки.

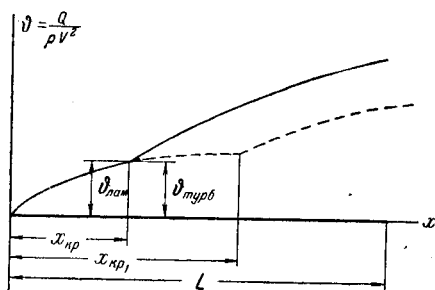


Рис. 7.19. При непрерывном изменении силы трения вдоль плоской пластинки в точке перехода $\delta_{\text{лам}} = \delta_{\text{турб}}$. Изменение $x_{\text{кр}}$ изменяет все характеристики движения в турбулентной части слоя (пунктирная кривая).

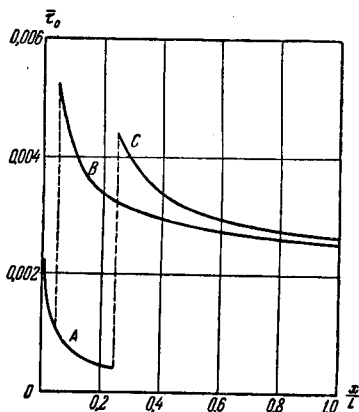


Рис. 7.20. Распределение касательных напряжений вдоль плоской пластинки при разном расположении точки перехода ламинарного движения в слое в турбулентное ($R = 10^7$).

Зависимость коэффициента сопротивления плоской пластинки от положения точки перехода и числа Рейнольдса, вычисленная по гипотезе непрерывного распределения силы трения, представлена в виде семейства кривых на рис. 7.21¹⁾.

Каждая кривая соответствует здесь определенному положению точки перехода, которое характеризуется величиной $\bar{x}_{\text{кр}} = x_{\text{кр}}/L = \frac{R_{\text{кр}}}{R}$; в частности, нижняя кривая соответствует пограничному слою, ламинарному на всем протяжении ($\bar{x}_{\text{кр}} = 1$), верхняя кривая — слою, турбулентному на всем протяжении ($\bar{x}_{\text{кр}} = 0$).

Такое семейство кривых удобно для расчета сопротивления трения крыла. Дело в том, что у крыльев положение точки перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный в широком

¹⁾ Федяевский К. К. и Горощенко В. Т., Расчет профильного сопротивления крыла, Техника Воздушного флота, 1940.

диапазоне чисел Рейнольдса можно считать фиксированным: точка перехода здесь расположена вблизи точки минимума давления,

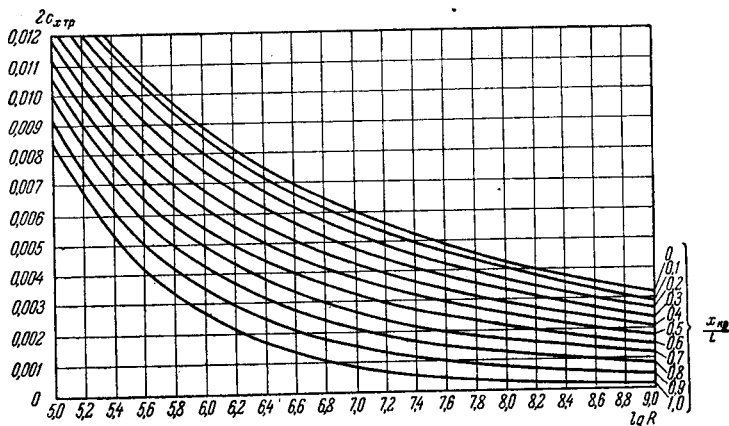


Рис. 7.21. Зависимость удвоенного коэффициента сопротивления плоской пластинки от положения точки перехода ламинарного слоя в турбулентный и числа Рейнольдса (по гипотезе равенства толщин потери импульса в точке перехода).

непосредственно за ней. Поэтому $x_{кр}$ для каждого крыла можно считать величиной заданной и практически постоянной, как это предположено на рис. 7.21.

§ 11. Влияние шероховатости пластинки на распределение касательных напряжений и сопротивление. Величина допустимой шероховатости

Перейдем теперь к выяснению влияния шероховатости на величину касательных напряжений и сопротивление трению плоской пластинки. При этом будем исходить из предположения о том, что распределение скоростей в пограничном слое шероховатой пластинки такое же, как и распределение скоростей вблизи шероховатой стенки трубы. Эта гипотеза позволяет применить к случаю «внешней» задачи (обтеканию пластинки) результаты экспериментальных исследований течения жидкости по шероховатым трубам (см. гл. VI, § 11). Напомним кратко, что если жидкость течет по шероховатой трубе, то в зависимости от значения числа Рейнольдса возможен один из трех режимов обтекания бугорков, образующих шероховатую поверхность. Первый из этих режимов соответствует ламинарному течению, при котором бугорки обтекаются плавно, без отрыва вихрей. Сопротивление трению при этом такое же, как и для гладкой поверхности. С возрастанием числа Рейнольдса ламинарный слой становится все более тонким, верхушки бугорков выходят за пределы ламинарного слоя и обтекаются с отрывом вихрей. При этом втором режиме сопротивление определяется