незамкнутая: она проходит через спутную струю за телом и тянется вдоль потока до бесконечности. Распределение скоростей во внешнем потоке следует рассчитывать так, как будто он обтекает эту поверхность. Можно затем, действуя по методу последовательных приближений, уточнять распределение скоростей в пограничном слое, величины δ_*, форму поверхности, обтекаемой внешним потоком, и распределение скоростей по этой поверхности.

Так как эта поверхность является незамкнутой (она ограничивает так называемое «полутело»), то хвостовая критическая точка на ней отсутствует. Оттеснение пограничным слоем линий тока наружного потока приводит к тому, что в несжимаемой среде и в дозвуковом потоке газа скорости во внешнем потоке увеличиваются по сравнению с обтеканием того же тела идеальной средой и действительные давления вблизи хвостовой точки тела оказываются всегда *меньшими*, нежели давления при обтекании тела идеальной средой; в частности, в хвостовой точке коэффициент давления не достигает значения, равного единице.

Противоположное влияние на распределение давления в хвостовой части тела оказывает пограничный слой в случае сверхзвукового потока газа. Оттеснение пограничным слоем линий тока внешнего потока приводит в данном случае к тому, что скорости на этих линиях тока уменьшаются (напомним, что в сверхзвуковом потоке уменьшение поперечного сечения струйки влечет за собой уменьшение скорости). Давления в результате этого *увеличиваются* по сравнению с давлениями при обтекании данного тела идеальной средой.

Влияние пограничного слоя на внешний поток становится особенно существенным и заметным в случае отрыва слоя, так как при этом контур, обтекаемый внешним потенциальным потоком, может значительно отличаться от контура тела. В этом случае нельзя пользоваться результатами расчета потенциального потока, обтекающего контур тела.

Для определения поля скоростей на внешней границе слоя необходимо в этом случае исходить из экспериментальных данных (например, из результатов измерения давления на поверхности тела) или задаваться для расчета потенциального потока формой замкнутой линии тока, которая совпадает с контуром тела в передней части, а далее охватывает вихревую область за телом.

Нужно, однако, сказать, что проблема обратного влияния сорванного пограничного слоя на внешний поток до настоящего времени еще не решена.

§ 14. Некоторые точные решения уравнений ламинарного пограничного слоя

Уравнения ламинарного пограничного слоя не решены до настоящего времени в общем виде, т. е. для любого распределения скорости $U(x)$ в потенциальном потоке. Точные решения этих уравнений известны только для некоторых частных случаев функции $U(x)$. Одним из таких случаев является продольно обтекаемая плоская пластинка ($U = \text{const}$), для которой точное решение дифференциальных уравнений пограничного слоя приведено в § 6.

Практическое значение точных решений заключается в том, что, зная профили скоростей в пограничном слое для некоторых частных случаев $U(x)$, можно с помощью уравнения импульсов приближенно определить движение в слое при произвольном распределении скорости $U(x)$. Однако плоская пластинка для этого недостаточна, так как в ее пограничном слое отсутствует продольный градиент давления ($dp/dx = 0$), присущий всем другим случаям обтекания тел. Поэтому мы займемся отысканием других частных решений уравнений пограничного слоя.

Заменив в уравнениях (7.4) продольный градиент давления его выражением по уравнению (7.7)

$$\frac{dp}{dx} = -\rho UU',$$

где $'$ означает дифференцирование по x, мы сможем представить уравнения ламинарного пограничного слоя в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= UU' + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.38}$$

Эти два уравнения с двумя неизвестными v_x и v_y можно привести к одному уравнению для функции тока $\psi(x, y)$. В самом деле, если введем функцию тока согласно известным из кинематики формулам

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

то уравнение неразрывности движения будет удовлетворено, а первое из уравнений (7.38) примет вид:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = UU' + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}. \tag{7.39}$$

Будем рассматривать пограничный слой как асимптотический; тогда граничные условия для функции тока запишутся следующим образом: при $y = 0$ $\partial\psi/\partial x = \partial\psi/\partial y = 0$; при $y = \infty$ $\partial\psi/\partial y = U$.

Введем в уравнение (7.39) вместо y новую независимую переменную η, определяемую формулой

$$\eta = y\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ есть некоторая функция, которая будет определена в дальнейшем. Так как

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\varphi, \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}\varphi^2, \qquad \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3}\varphi^3,$$

то, подставляя эти выражения в уравнение (7.39), получим:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = \frac{UU'}{\varphi^2} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3}\varphi. \tag{7.40}$$

Будем искать частные решения этого уравнения, имеющие вид

$$\psi = U(x)\frac{\Phi(\eta)}{\varphi(x)}. \tag{7.41}$$

Эти решения обладают тем свойством, что соответствующие им профили продольной скорости $v_x = f(y)$ подобны между собой во всех сечениях слоя, т. е. получаются один из другого умножением абсцисс на какой-либо постоянный для всего профиля множитель и умножением ординат на постоянный для всего профиля множитель. Действительно,

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\varphi = U\Phi'(\eta) = U\Phi'[y\varphi(x)];$$

при переходе от одного сечения к другому изменяется множитель $U(x)$ при $\Phi'(\eta)$ и множитель $\varphi(x)$ при y, но профиль безразмерной скорости

$$\frac{v_x}{U} = \Phi'(\eta),$$

построенный по переменной η, остается одним и тем же во всех сечениях слоя.

Вычислим для функции тока, взятой в форме (7.41), производные, входящие в уравнение (7.40),

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta}=\frac{U\Phi'}{\varphi},\qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}=\frac{U\Phi''}{\varphi},\qquad \frac{\partial^3\psi}{\partial\eta^3}=\frac{U\Phi'''}{\varphi},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=U'\frac{\Phi}{\varphi}-U\frac{\Phi\varphi'}{\varphi^2}+U\frac{\Phi'\varphi'}{\varphi^2}\eta,\qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial\eta}=U'\frac{\Phi'}{\varphi}+\frac{U\Phi''\varphi'}{\varphi^2}\eta.$$

После подстановки этих выражений в уравнение (7.40) и разделения обеих частей на νU получим:

$$\frac{U'}{\nu\varphi^2}\Phi'^2-\frac{1}{\nu}\left(\frac{U'}{\varphi^2}-\frac{U\varphi'}{\varphi^3}\right)\Phi\Phi''=\frac{U'}{\nu\varphi^2}+\Phi'''.$$

Для того чтобы функция Φ зависела только от η, коэффициенты этого уравнения и его свободный член должны быть постоянными величинами (т. е. не должны зависеть от x). Отсюда получаем следующие два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{U'}{\nu\varphi^2}=a=\text{const},\qquad \frac{1}{\nu}\left(\frac{U'}{\varphi^2}-\frac{U\varphi'}{\varphi^3}\right)=b=\text{const}. \tag{7.42}$$

Если они выполняются, то для Φ получится также обыкновенное дифференциальное уравнение

$$a\Phi'^2-b\Phi\Phi''=a+\Phi'''. \tag{7.43}$$

Из уравнений (7.42) можно определить функции φ и U, для которых имеет место решение вида (7.40), а из уравнения (7.43) — функцию Φ.

Граничные условия, которым должна удовлетворять функция тока, приведутся, как видно из выражений для $\partial\psi/\partial x$ и $\partial\psi/\partial y$, к следующим условиям, которым должна удовлетворять функция Φ: при $\eta=0$ $\Phi=0$ и $\Phi'=0$, при $\eta=\infty$ $\Phi'=1$.

Уравнения (7.42) можно решить в общем виде. Вычтем из первого уравнения второе:

$$\frac{U\varphi'}{\varphi^3}=\nu(a-b). \tag{7.44}$$

Второе уравнение можно представить в виде

$$\left(\frac{U}{\varphi}\right)'=b\nu\varphi. \tag{7.45}$$

Исключая U из этих уравнений, получим:

$$a_1\varphi'^2-b_1\varphi''\varphi=0,\qquad \text{или}\qquad a_1\frac{\varphi'}{\varphi}=b_1\frac{\varphi''}{\varphi'},$$

где

$$a_1=\nu(2a-3b),\qquad b_1=\nu(a-b).$$

Решая уравнение для φ, рассмотрим два случая: $a_1=b_1$ и $a_1\neq b_1$. В первом из этих случаев решением уравнения является

$$\varphi=e^{C_1x+C_2},$$

во втором случае

$$\varphi=(C_3x+C_4)^n,$$

где $n=\frac{b_1}{b_1-a_1}$, а C_1, C_2, C_3, C_4 суть постоянные интегрирования. Соответствующие выражения для U будут иметь вид

$$U=\frac{b_1}{C_1}e^{2(C_1x+C_2)} \tag{7.46}$$

и

$$U=\frac{b_1}{C_3n}(C_3x+C_4)^{2n+1}. \tag{7.47}$$

Итак, для каждого распределения скоростей в потенциальном потоке, которое может быть представлено в форме (7.46) или (7.47), существует точное решение уравнений пограничного слоя вида (7.41). Для того чтобы полностью определить это решение, необходимо проинтегрировать, при соответствующих значениях параметров a и b, уравнение (7.43). Обычно для этой цели применяют методы численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Рассмотрим теперь некоторые наиболее важные частные случаи. Допустим, что скорость в потенциальном потоке есть линейная функция x. В этом случае окончательная формула (7.47) неприменима, так как для того, чтобы получить линейную зависимость скорости от x, пришлось бы в этой формуле положить $n=0$. Обратимся поэтому к исходным уравнениям (7.44) и (7.45), в которых положим $\varphi=1$. Тогда получим $a=b$ и $U=b\nu x+c_1$, т. е. скорость есть линейная функция от x. Соответствующее решение уравнения (7.39) имеет вид

$$\psi=(b\nu x+c_1)\,\Phi(\eta);$$

при этом $\Phi(\eta)$ удовлетворяет уравнению (7.43), в котором следует положить $a=b$:

$$b\Phi'^2-b\Phi\Phi''=b+\Phi'''.$$

Другой важный частный случай получим, полагая $C_4=0$; тогда будем иметь:

$$\psi=C_3^nx^n;\qquad U=C_3^{2n}\frac{b}{n}\,x^{2n+1}.$$

Введем обозначения:

$$2n+1=m,\quad C_3^{2n}\frac{b_1}{n}=c.$$

Формула для распределения скоростей тогда запишется в виде

$$U=cx^m.$$

Определим φ и параметры a и b. Подставляя вместо n его выражение через a и b в равенство $2n+1=m$, получаем следующее соотношение:

$$\frac{a}{b}=\frac{2m}{m+1}.$$

Значение одного из параметров можно в данном случае ($C_4=0$) выбрать произвольно; положим $b=1$. Тогда

$$\frac{b_1}{n}=\frac{2\nu}{m+1},\quad C_3^n=\left(\frac{cn}{b_1}\right)^{1/2}=\left[\frac{c\,(m+1)}{2\nu}\right]^{1/2}$$

и для φ получается формула

$$\varphi=\left[\frac{c\,(m+1)}{2\nu}\right]^{1/2}x^{(m-1)/2}.$$

Уравнение для $\Phi(\eta)$ принимает вид

$$\frac{2m}{m+1}\Phi'^2 - \Phi\Phi'' = \frac{2m}{m+1} + \Phi''',$$

или если обозначить $2m/(m+1) = \beta$, то

$$\Phi''' + \Phi\Phi'' = \beta(\Phi'^2 - 1).$$

Это уравнение численно проинтегрировано [1]) при указанных выше граничных условиях для ряда значений параметра β; для функции $\Phi'(\eta, \beta)$ составлены таблицы, по которым можно построить соответствующие профили скорости.

§ 15. Приближенный расчет ламинарного пограничного слоя в несжимаемой среде. Метод Кочина — Лойцянского

Рассмотрим плоское, установившееся движение несжимаемой жидкости в ламинарном пограничном слое при произвольном распределении скорости $U(x)$ в потенциальном потоке, окружающем пограничный слой.

Задача об определении движения в этих условиях не решена точно до настоящего времени. Существует, однако, ряд приближенных методов ее решения. Наиболее простые и практически пригодные из них базируются на уравнении импульсов (7.9).

Сущность этих методов заключается в том, что приближенно задается распределение скоростей по сечению пограничного слоя (например, в виде полинома или тригонометрической суммы) или используются профили скорости, полученные в результате точного решения уравнений пограничного слоя для некоторых частных случаев $U(x)$ (см. предыдущий параграф). Уравнение импульсов позволяет тогда определить толщину слоя или толщину потери импульса; затем по закону Ньютона можно найти распределение касательных напряжений вдоль контура тела, а следовательно, и положение точки отрыва слоя ($\tau_0 = 0$).

Имея в виду воспользоваться уравнением импульсов, преобразуем его к наиболее удобному в данном случае виду. По закону Ньютона

$$\tau_0 = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0};$$

так как v_x имеет ту же размерность, что и U, а y — ту же размерность, что и толщина потери импульса ϑ, то касательное напряжение можно выразить через U и ϑ следующим образом:

$$\tau_0 = \mu\frac{U}{\vartheta}\zeta,$$

где ζ есть некоторый безразмерный коэффициент.

Подставляя последнее выражение в уравнение импульсов (7.9), получим:

$$\frac{d\vartheta}{dx} + \frac{U'\vartheta}{U}\left(2 + \frac{\delta_*}{\vartheta}\right) = \frac{\nu\zeta}{U\vartheta},$$

или

$$\frac{U}{2\nu}\frac{d\vartheta^2}{dx} + \frac{U'\vartheta^2}{\nu}\left(2 + \frac{\delta_*}{\vartheta}\right) = \zeta.$$

Введем обозначения

$$f = \frac{U'\vartheta^2}{\nu}, \quad \frac{\delta_*}{\vartheta} = H$$

[1]) Hartree D. R., Proceed. Cambridge Philos. Soc., v. 33, 1937.